Algèbre linéaire I
MAT 2541
Examen mi-session - Solutions

Professeur : Paul-Eugène Parent

⇒ Cet examen est d'une durée de 80 minutes.
⇒ Les notes de cours, livres et références sont interdits.
⇒ Aucune calculatrice n'est permise.
⇒ Soyez le plus précis possible lors de la rédaction de vos démonstrations.

Question 1 (5 point)
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions.

1. Définissez : la notion de fonction *surjective*.
2. Montrez que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g \circ f$ est surjective alors que peut-on affirmer dans un premier temps à propos de f et dans un second temps à propos de g (démontrez ou donnez un contre-exemple) ?

Solutions :

1. Un application $f : X \to Y$ est surjective si pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
2. Soit $z \in Z$. Comme g est surjective, il existe $y \in Y$ tel que $g(y) = z$. De plus, comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a alors
$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$
Comme $z \in Z$ est arbitraire, on conclut que $g \circ f$ est surjective.
3. Dans un premier temps f n'est pas, en générale, surjective. En effet, si on pose $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ avec $g(x) = x^2$, alors $g \circ f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ avec $g(f(x)) = x$ est surjective mais f ne l'est pas. D'autre part, soit $z \in Z$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in X$ tel que $g(f(x)) = z$. En particulier, $g(y) = z$, où $y = f(x) \in Y$. On conclut que g est surjective.

Question 2 (5 point)
Soit V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et $\mathcal{M}$ une famille non vide de sous-espaces de V telle que si $U, W \in \mathcal{M}$ alors il existe $P \in \mathcal{M}$ satisfaisant $U \subset P$ et $W \subset P$.

1. Définissez : la notion *de sous-espace vectoriel*.
2. Montrez que
$$\bigcup_{U \in \mathcal{M}} U$$
est un sous-espace de V.

Solutions :

1. Un sous-ensemble non vide U d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V est un sous-espace si

(a) Si $u, v \in U$ alors $u + v \in U$; et

(b) Si $u \in U$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ alors $\lambda u \in U$.

2. Comme la famille est non vide, il y a donc au moins un sous-espace dans l'union. En particulier, comme 0 appartient à tout sous-espace, cette union est donc non vide. Soit $u, w \in \bigcup_{U \in \mathcal{M}} U$. Alors il existe $U \in \mathcal{M}$ et $W \in \mathcal{M}$ tels que $u \in U$ et $w \in W$. Par la propriété de la famille $\mathcal{M}$, il existe $P \in \mathcal{M}$ tel que $U, W \subset P$. Mais dès lors comme P est un sous-espace, nous avons
$$u + w \in P \subset \bigcup_{U \in \mathcal{M}} U.$$
Si $u \in \bigcup_{U \in \mathcal{M}} U$ et $\alpha \in \mathbb{k}$ alors il existe $U \in \mathcal{M}$ tel que $u \in U$. Mais dès lors comme U est un sous-espace, nous avons
$$\alpha u \in U \subset \bigcup_{U \in \mathcal{M}} U.$$
On conclut que $\bigcup_{U \in \mathcal{M}} U$ est un sous-espace.

Question 3 (5 points)

Soit le sous-ensemble des polynômes de degré au plus trois à coefficients réels ($\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$) suivant
$$U = \left\{ ax^3 - 2bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Définissez : la notion d'ensemble *linéairement indépendant.*
2. Montrez que U est un sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
3. Trouvez une base de U et calculez $\dim_{\mathbb{R}} U$.
4. Complétez la base que vous avez obtenue pour U en une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Solutions :

1. On dit qu'un sous-ensemble fini $\{v_1, ..., v_n\}$ d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V est linéairement indépendant lorsque l'implication suivante est vrai :
$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$
où $a_i \in \mathbb{k}$. En général, on dit qu'un sous-ensemble S de V est linéairement indépendant si tous les sous-ensembles finis de S sont linéairement indépendants.
2. On remarque que tous les éléments de U s'écrivent
$$ax^3 - 2bx + c \;=\; a \cdot x^3 + (-2b) \cdot x + c \cdot 1,$$
c'est-à-dire, $U \subset < x^3, x, 1 >$. En utilisant la remarque dans le sense inverse, c'est-à-dire,
$$\alpha x^3 + \beta x + \gamma = \alpha x^3 - 2(\frac{-\beta}{2})x + \gamma,$$
on a $U =< x^3, x, 1 >$. Comme nous avons vu en classe, le sous-ensemble de droite est un sous-espace. On conclut que U est un sous-espace.

3. Par le (2), $\{x^3, x, 1\}$ est un ensemble générateur de U. De plus, on a vu au DGD qu'il est linéairement indépendant. En effet, si

$$ax^3 + bx + c = 0$$

alors par la notion d'égalité dans $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ on obtient $a = b = c = 0$, ce qui démontre bien que l'ensemble est linéairement indépendant. On conclue que c'est une base et donc $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$, le nombre d'éléments de la base.

4. On a vu au DGD que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) =< x^3, x^2, x, 1 >$ et que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$ ce qui implique $\{x^3, x^2, x, 1\}$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. De plus c'est bien une extension de la base de U.

Question 4 (5 points)
Soit $T : V \to W$ une application linéaire entre deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels V et W.

1. Définissez : la notion d'application *linéaire*.
2. Qu'est-ce que le noyau de T, c'est-à-dire, $\ker T$?
3. Soit $w \in W$ et supposons qu'il existe un $v_o \in V$ tel que $T(v_o) = w$. Montrez que $T(v) = w$ si et seulement si $v = v_o + u$, où $u \in \ker T$.

Solutions :

1. Une application $T : V \to W$ entre $\mathbb{k}$-espaces vectoriels est linéaire si
   (a) pour tout $v_1, v_2 \in V$ on a $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$; et
   (b) pout tout $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ on a $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.
2. Le noyau de T est le sous-ensemble de V

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}.$$

3. Si $T(v) = w$ alors $T(v) = T(v_o)$. Par linéarité, $T(v - v_o) = 0$, c'est-à-dire, $v - v_o \in \ker T$. En d'autres mots, il existe $u \in \ker T$ tel que $u = v - v_o$, c'est-à-dire, $v = v_o + u$ pour un certain $u \in \ker T$. Réciproquement, si $v = v_o + u$ où $u \in \ker T$ alors on a

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v_o + u) \\ &= T(v_o) + T(u) \quad \text{par la linéarité de } T \\ T(v) &= w + 0 = w \quad \text{car } u \in \ker T, \end{aligned}$$

d'où $T(v) = w$.