



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1722 C – Test #1A

Professeur : Guy Beaulieu

15 octobre, 2015

Nom : _____ Prénom : _____

d'étudiant : _____

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature : _____

Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. N'oubliez pas que certaines questions valent plus de point que d'autre. Notez les questions que vous vous sentez confiant de répondre et répondez à ceux-ci en premier : vous ne devez pas répondre les questions dans l'ordre qu'ils sont écrites.

- La durée de cet examen est **80 minutes**.
- Cet examen comprends 7 questions pour un total de 25 points. La bonne réponse nécessite une justification écrite lisiblement et logiquement; vous devez me convaincre que vous savez pourquoi votre solution est la bonne. Dessinez des boites autour de vos réponses finales.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page, veuillez l'indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **ne sont pas permis**.
- Seules les calculatrices approuvées par la Faculté des Sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX-260X et Casio FX-300X) seront permises .

Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

d'étudiant : _____, Note finale : _____ sur 25

Problème	1	2	3	4	5	6	7
Notes							

Question 1. [5 points] Étudier la convergence de l'intégrale ci-dessous et, si l'intégrale est convergente, donner sa valeur.

$$\int_2^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx$$

Solution.

L'intégrale est impropre, car la fonction $\frac{6}{(x-3)^{2/3}}$ n'est pas définie en $x = 3$. On a

$$\int_2^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx = \int_2^3 \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx + \int_3^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx$$

pourvu que chacune des intégrales de droite soient convergentes.

En posant $u = x - 3$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx &= \int \frac{6}{u^{2/3}} du \\ &= 6 \int u^{-2/3} du \\ &= \frac{6}{1-2/3} u^{1-2/3} + C \\ &= 18(x-3)^{1/3} + C. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 3^-} \int_2^t \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx \\ &= 18 \lim_{t \rightarrow 3^-} ((t-3)^{1/3} - (2-3)^{1/3}) \\ &= -18(-1)^{1/3} \\ &= 18 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_3^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \int_t^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx \\ &= 18 \lim_{t \rightarrow 3^+} ((11-3)^{1/3} - (t-3)^{1/3}) \\ &= 18(8)^{1/3} \\ &= 36. \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale est convergente et

$$\int_2^{11} \frac{6}{(x-3)^{2/3}} dx = 18 + 36 = 54.$$

Question 2. [2 points] On veut employer un test de comparaison pour déterminer si

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds$$

est convergente, et si oui majorer sa valeur. Choisir le bon argument.

- (A) L'intégrale est convergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \leq (5 + 2)s^2 = 7s^2$ et $s^6 + 2 \geq s^6$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \leq \int_1^{\infty} \frac{7}{s^4} ds = \frac{7}{3}.$$

- (B) L'intégrale est divergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \geq 3s^2$ et $s^6 + 2 \geq 3$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \geq \int_1^{\infty} s^2 ds = \infty.$$

- (C) L'intégrale est divergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \geq 5s^2$ et $s^6 + 2 \geq 3$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \geq \int_1^{\infty} \frac{5}{3} s^2 ds = \infty.$$

- (D) L'intégrale est convergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \leq (5 + 2)s^2 = 7s^2$ et $s^6 + 2 \leq 3s^6$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \leq \int_1^{\infty} \frac{7}{3s^4} ds = \frac{7}{9}.$$

- (E) L'intégrale est convergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \leq 5s^2$ et $s^6 + 2 \geq s^6$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \leq \int_1^{\infty} \frac{5}{s^4} ds = \frac{5}{3}.$$

- (F) L'intégrale est convergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \leq 5s^2$ et $s^6 + 2 \leq 3s^6$, donc

$$\int_1^{\infty} \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \leq \int_1^{\infty} \frac{5}{3s^4} ds = \frac{5}{9}.$$

Solution. (A) L'intégrale est convergente car pour tout $s \geq 1$, on a $5s^2 + 2s \cos(s) \leq (5 + 2)s^2 = 7s^2$ et $s^6 + 2 \geq s^6$, donc

$$\int_1^\infty \frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} ds \leq \int_1^\infty \frac{7}{s^4} ds = \frac{7}{3}.$$

Comment : Pour tout $s \geq 1$, on a $1 \leq \cos(s) \leq 1$, donc

$$5s^2 + 2s \cos(s) \leq 5s^2 + 2s \leq 7s^2.$$

On a aussi $s^6 + 2 \geq s^6$, donc

$$\frac{5s^2 + 2s \cos(s)}{s^6 + 2} \leq \frac{7s^2}{s^6} = \frac{7}{s^4}.$$

Comme

$$\int_1^\infty \frac{7}{s^4} ds = 7 \int_1^\infty \frac{1}{s^4} ds = \frac{7}{3} < \infty,$$

l'intégrale donnée est convergente et sa valeur est $\leq 7/3$.

Question 3. [5 points] Déterminer l'aire de la région du plan délimitée par les courbes

$$y = 2x, \quad y = 4x \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{x} + 1$$

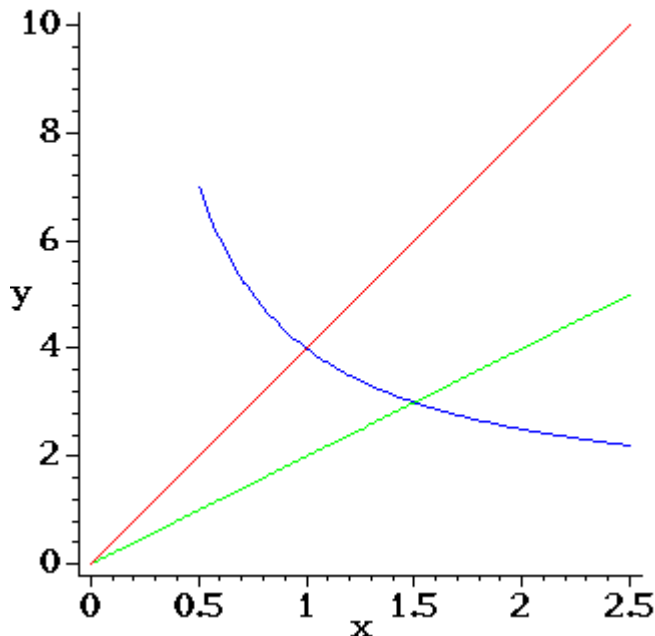
dans le premier quadrant (défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$).

Solution. La droite $y = 2x$ et l'hyperbole $y = \frac{3}{x} + 1$ se coupent aux points (x, y) où

$$2x = \frac{3}{x} + 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0.$$

La seule racine positive de cette équation est $x = 3/2$. Donc leur point d'intersection dans le premier quadrant est $(x, y) = (3/2, 3)$. De même, on trouve que la droite $y = 4x$ coupe l'hyperbole au point $(x, y) = (1, 4)$ du premier quadrant.

Le dessin ci-dessous illustre la région qui nous intéresse avec, en bleu, l'hyperbole $y = \frac{3}{x} + 1$, en vert, la droite $y = 2x$ et, en rouge, la droite $y = 4x$.



Cette région se divise en deux parties : la moitié gauche décrite par $0 \leq x \leq 1$ et $2x \leq y \leq 4x$, et la moitié droite décrite par $1 \leq x \leq 3/2$ et $2x \leq y \leq \frac{3}{x} + 1$.

Son aire est donc

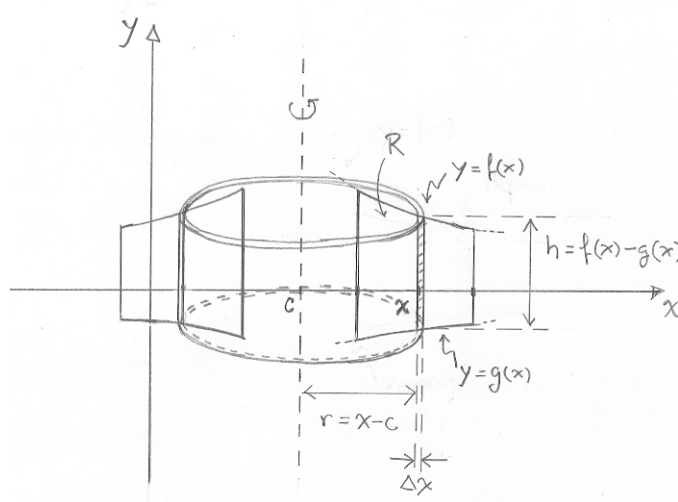
$$\begin{aligned} \int_0^1 (4x - 2x) dx + \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{x} + 1 - 2x \right) dx &= \left[2\frac{x^2}{2} \right] - 0^1 + [3\ln(x) + x - x^2]_1^{3/2} \\ &= 3 * \ln(3/2) + 1/4 \approx 1.466395. \end{aligned}$$

Question 4. [5 points] Soit S le solide de révolution obtenu par rotation autour de la droite $x = 1$ de la région R du plan xy délimitée par les courbes

$$x = 3, \quad x = 4, \quad y = \frac{4}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{-2}{x}.$$

Calculer le volume de S.

Solution. Nous allons utiliser la méthode des cylindres. La figure ci-dessous montre la région R et un cylindre en question :



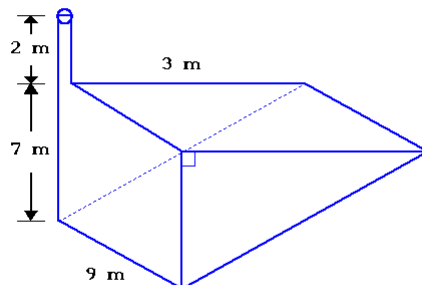
Sur la figure, on doit lire $c = 1$, $f(x) = 4/x$ et $g(x) = -2/x$. On a donc $r = x - 3$, $h = f(x) - g(x) = \frac{6}{x}$.

Quant à la fonction $A(x)$, elle représente laire du cylindre, donc $A(x) = 2\pi r h = 2(x - 1)\frac{6}{x}$

Comme la région R est comprise entre $x = 3$ et $x = 4$, le volume en question est

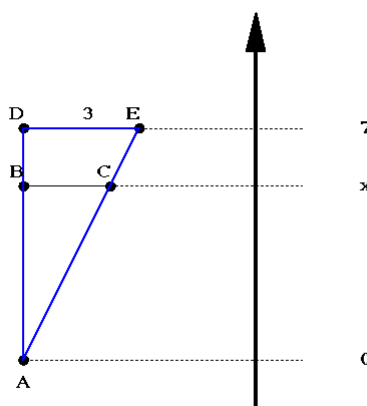
$$\begin{aligned} \int_3^4 A(x) dx &= 2\pi \int_3^4 (x - 1)\frac{6}{x} dx \\ &= 2\pi \int_3^4 \left(6 - \frac{6}{x}\right) dx \\ &= 2\pi [6x - 6 \ln |x|]_3^4 \\ &= 2\pi(6(4 - 3) - 6 \ln(4/3)) \\ &\approx 26,853753. \end{aligned}$$

Question 5. [5 points] Un réservoir a la forme d'un prisme droit dont les extrémités parallèles sont des triangles rectangles, comme sur la figure ci-dessous. Il fait 7 m de haut, 9 m de large et 3 m de long, et il est rempli d'eau. On veut calculer le travail requis pour pomper toute son eau par le tuyau à 2 m au-dessus du réservoir. (Notez que 1 m^3 d'eau pèse approximativement 9800 N)



Solution.

La figure ci-dessous montre une coupe du réservoir par un plan parallèle aux triangles d'extrémité.



La section horizontale de ce réservoir à la hauteur x est un rectangle de largeur 9 et de longueur $|BC|$. Par hypothèse, à la hauteur $x = |AD| = 7$, on a $|DE| = 3$. Comme les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables, on en déduit que

$$|BC| = \frac{|AB|}{|AD|}|DE| = \left(\frac{x}{7}\right)3 = (3/7)x.$$

Donc, pour Δx petit, la couche deau comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ s'assimile à un parallélépipède rectangle plat d'épaisseur Δx , de largeur 9 et de longueur $(3/7)x$. Son volume est environ

$$(9)(3/7)x\Delta x = (27/7)x\Delta x \text{ m}^3.$$

Comme 1 m³ d'eau pèse environ 9800 N, le poids de cette couche est environ

$$9800(27/7)x\Delta x = 37800x\Delta x = P(x)\Delta x \text{ N}$$

avec $P(x) = 37800x$.

Pour pomper cette couche à 2 m par dessus le réservoir, il faut la faire passer de x mètres à 9 mètres, donc il faut l'élever de $9 - x$ mètres. Cela représente un travail de

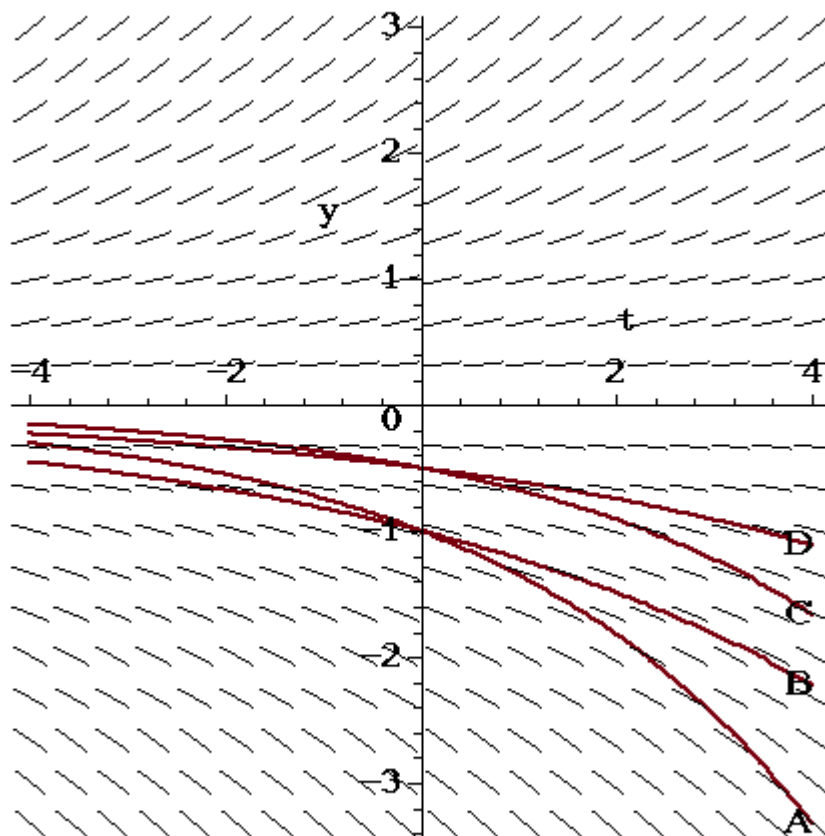
$$(9 - x)P(x)\Delta x = 37800x(9 - x)\Delta x \text{ Joules,}$$

donc $w(x) = 37800x(9 - x)$.

Le travail requis pour pomper toute leau est :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^7 37800x(9 - x) dx \\ &= [170100x^2 - 12600x^3]_0^7 \\ &\approx 4.01 \times 10^6 \text{ J.} \end{aligned}$$

Question 6. [1 point] Sur le graphique ci-dessous, on a dessiné le champ de pentes d'une équation différentielle $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$, ainsi que 4 courbes numérotées A, B, C et D.



Laquelle de ces courbes est le graphe de la solution $y = y(t)$ avec $y(0) = -1$?

Solution. B

Question 7. [2 points] On considère le problème à valeur initiale

$$y' = \frac{0.2x}{y}, \quad y(-2) = 0.5.$$

Appliquer la méthode d'Euler pour approcher $y(-1)$ par pas de $h = 0.5$.

Donner votre approximation pour $y(-1)$ avec une précision de ± 0.01 .

Solution. L'équation différentielle à résoudre est de la forme $y' = F(x, y)$ où $F(x, y) = 0.2x/y$.

Pour le pas $h = 0.5$, la méthode d'Euler consiste à poser $x_0 = -2$ et $y_0 = 0.5$ (puisque $y(-2) = 0.5$), puis à définir récursivement

$$x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.5$$

et

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h = y_n + (0.2x_n/y_n)(0.5) = y_n + 0.1(x_n/y_n)$$

pour chaque $n = 0, 1, 2, \dots$. Alors on a $y(x_n) \approx y_n$ pour chaque n .

Comme on veut approximer $y(-1)$, on arrête lorsque $x_n = -1$.

On trouve :

$$x_1 = -2 + 0.5 = -1.5, \quad y_1 = 0.5 + 0.1(-2)/(0.5) = 0.1$$

$$x_2 = x_1 + 0.5 = -1, \quad y_2 = 0.1 + 0.1(-1.5)/(0.1) = -1.4$$

Donc la réponse est $y(-1) \approx -1.4$.

Page supplémentaire pour brouillon

Page supplémentaire pour brouillon