MAT 2784 A Devoir#1 Solution

1. $y\sqrt{1+y^2}\,y' = xe^x$ , $y(1)=3$

L'éq° est séparable : $y\sqrt{1+y^2}\,dy = xe^x\,dx$

intégrons pour obtenir : $\int y\sqrt{1+y^2}\,dy = \int xe^x\,dx + C$

$$\frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2} = (x-1)e^x + C \quad \text{(sol}^{\text{n}}\text{ générale implicite)}$$

$$(1+y^2)^{3/2} = 3(x-1)e^x + C$$

Mais $y(1)=3 \Rightarrow C = 10^{3/2}$

et donc $(1+y^2)^{3/2} = 3(x-1)e^x + 10^{3/2}$

La sol$^{n}$ unique est alors $\boxed{y^2 = \left(\left(3(x-1)e^x + 10^{3/2}\right)^{2/3} - 1\right)}$

---

2. $(2x+1)\,dx + (4y+2)\,dy = 0$ , $y(2)=1$

C'est aussi une éq° séparable . $(4y+2)\,dy = -(2x+1)\,dx$

$\Rightarrow \int(4y+2)\,dy = -\int(2x+1)\,dx + C$

$\Leftrightarrow 2y^2+2y = -x^2-x+C$

$2y^2+2y+x^2+x = C$ (solution générale)

Mais $y(2)=1 \Rightarrow 2(1)^2+2(1)+(2)^2+(2) = C \Rightarrow C=10$

$\Rightarrow$ La sol$^{n}$ unique est $\boxed{2y^2+2y+x^2+x=10}$

---

3. $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$ , $y(1)=5$

Cette éq° n'est ni séparable ni exacte.

Mais $\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x+2y \\ N(x,y) = -x \end{array}\right\}$ sont homogènes de degré 1.

On utilise alors la substitution $y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$

L'éq. devient : $(x + 2ux)dx - x(udx + xdu) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x\,dx + 2ux\,dx - xu\,dx - x^2 du = 0$

$\Leftrightarrow \quad x\,dx + ux\,dx - x^2 du = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(1+u)\,dx - x^2 du = 0$

qui est séparable $\quad \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{x} dx$

Intégrale $\quad \int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x} + C$

$\Leftrightarrow \quad \ln|1+u| = \ln|x| + C$

$\Leftrightarrow \quad 1+u = Kx$

$\Leftrightarrow \quad u = Kx - 1$

Mais $u = y/x$ et donc $y = (Kx-1)x = Kx^2 - x$ (Sol. générale)

et $y(1) = 5 \Rightarrow 5 = K(1)^2 - 1 \Rightarrow K = 6$

La sol. unique est : $\boxed{y = 6x^2 - x}$

---

4. $(2x\cos y + y^2)dx + (2xy - x^2 \sin y)dy = 0, \quad y(1) = \pi$ (Ni séparable, ni homogène)

$M(x,y) = 2x\cos y + y^2 \Rightarrow M_y = -2x\sin y + 2y$
$N(x,y) = 2xy - x^2 \sin y \Rightarrow N_x = 2y - 2x\sin y$
$\Big\} \; M_y = N_x \Rightarrow$ Éq. exacte

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \quad \left(\text{ou } \int N(x,y)\,dy + g(x)\right)$

$= \int (2x\cos y + y^2)\,dx + g(y)$

$= x^2 \cos y + xy^2 + g(y)$

Mais $\frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2xy + g'(y) = N(x,y) = 2xy - x^2 \sin y$

$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow$ Prendre $g(y) = 0$

A17
A1
3

et donc $F(x,y) = x^2\cos y + xy^2$
La sol$^{n}$ générale est : $x^2\cos y + xy^2 = C$
Puis $y(1)=\pi \Rightarrow (1)^2\cos(\pi) + (1)(\pi)^2 = C \Rightarrow C = \pi^2 - 1$

La sol$^{n}$ unique est : $\boxed{x^2\cos y + xy^2 = \pi^2 - 1}$

5. $(8xe^y + 3y\sin x)\,dx + (4x^2e^y - 3\cos x + 2y)\,dy = 0,\ y(0)=3$ (Ni séparable ni homogène)

$M(x,y) = 8xe^y + 3y\sin x \Rightarrow M_y = 8xe^y + 3\sin x$
$N(x,y) = 4x^2e^y - 3\cos x + 2y \Rightarrow N_x = 8xe^y + 3\sin x$
$\Big\}\ M_y = N_x \Rightarrow$ Éq$^{n}$ exacte

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$ (ou $\int N(x,y)\,dy + g(x)$)
$= \int (8xe^y + 3y\sin x)\,dx + g(y)$
$= 4x^2e^y - 3y\cos x + g(y)$
Mais $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 4x^2e^y - 3\cos x + g'(y) = N(x,y) = 4x^2e^y - 3\cos x + 2y$
$g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2$
Donc, $F(x,y) = 4x^2e^y - 3y\cos x + y^2$
et la sol$^{n}$ générale est : $4x^2e^y - 3y\cos x + y^2 = C$
Avec $y(0)=3 \Rightarrow 4(0)^2e^3 - 3(3)\cos(0) + (3)^2 = C \Rightarrow C = 0$

La sol$^{n}$ unique est : $\boxed{4x^2e^y - 3y\cos x + y^2 = 0}$

A17
A1 4

6. $f(x) = x^3 + 8x - 7 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = -7 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}$ et $f$ est continue sur $[0,1]$. Donc d'après la T.V.I il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c)=$

De $x^3 + 8x - 7 = 0 \Rightarrow 8x = 7 - x^3 \Rightarrow x = \frac{7-x^3}{8}$

On pose $g(x) = \frac{7-x^3}{8}$

$\Rightarrow |g'(x)| = \left| -\frac{3}{8}x^2 \right| = \frac{3}{8}x^2 \le \frac{3}{8}$ sur $[0,1]$.

Donc cette $g(x)$ donnera un pt-fixe attractif. $(x_{n+1} = g(x_n))$

$x_0 = 0.75$, $x_1 = g(x_0) = \frac{7-(0.75)^3}{8} = 0.82227$

$x_2 = g(x_1) = \frac{7-(0.82227)^3}{8} = 0.80551$

$x_3 = g(x_2) = \frac{7-(0.80551)^3}{8} = 0.80967$

$x_4 = g(x_3) = \frac{7-(0.80967)^3}{8} = 0.80865$

$x_5 = g(x_4) = \frac{7-(0.80865)^3}{8} = 0.80890$

$x_6 = g(x_5) = \frac{7-(0.80890)^3}{8} = 0.80884$

$x_7 = g(x_6) = \frac{7-(0.80884)^3}{8} = 0.80885$

$x_8 = g(x_7) = \frac{7-(0.80885)^3}{8} = 0.80885 = x_7$

$\therefore$ stop

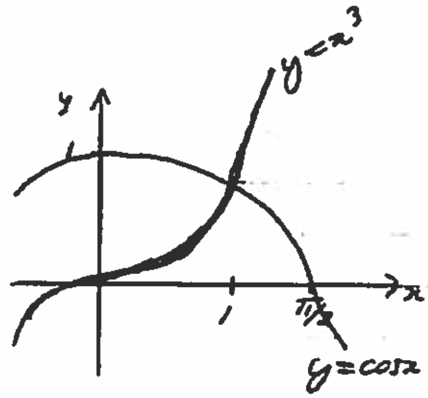
À 5 décimale la racine est $\boxed{0.80885}$

(Vérification: $f(0.80885) \simeq -1.9 \times 10^{-5}$)

O.K. ✓

4/7
A1 5

7.




On pose $f(x) = x^3 - \cos x$
$\Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + \sin x$

Méthode de Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^3 - \cos(x_n)}{3x_n^2 + \sin(x_n)}$

$x_0 = 1$, $\quad x_1 = 1 - \dfrac{1 - \cos(1)}{3 + \sin(1)} = 0.880\,333$

$x_2 = 0.880\,333 - \dfrac{(0.880\,333)^3 - \cos(0.880\,333)}{3(0.880\,333)^2 + \sin(0.880\,333)} = 0.865\,684$

$x_3 = 0.865\,684 - \dfrac{(0.865\,684)^3 - \cos(0.865\,684)}{3(0.865\,684)^2 + \sin(0.865\,684)} = 0.865\,474$

$x_4 = 0.865\,474 - \dfrac{(0.865\,474)^3 - \cos(0.865\,474)}{3(0.865\,474)^2 + \sin(0.865\,474)} = 0.865\,474 = x_3$ $\therefore$ stop

(Vérification : $(0.865\,474)^3 = 0.648\,279$
$\cos(0.865\,474) = 0.648\,279$ )

Donc, le point d'intersection est $\boxed{(0.865\,474,\ 0.648\,279)}$ à 6 décimales près.