Université d'Ottawa

Grupa - Partiel - I

MAT 1720 - B

Clémonell BILAYI-BIAKANA.

Exercice 1:

Trouvons l'ensemble de définition des fonctions indiquées:

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f existe si $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1+x^2 > 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ f existe si $1+x^2 > 0$.

- On résout d'abord $1+x^2 = 0$.
  Cette équation du second degré n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ car $\Delta = -4 < 0$.
-

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1+x^2$	$+$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$

Donc f existe si $x \in \mathbb{R}$.

D'où : $\boxed{E_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[}$

Rappel: $x \longmapsto \dfrac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$ existe si $q(x) > 0$.

Les fonctions p et q étant supposées polynômes.

d) $$f(x) = \frac{\sin(3x+4)}{\sqrt{x^2-1}}$$

f existe si $\begin{cases} 3x+4 \in \mathbb{R} & i) \\ x^2-1 > 0 & ii) \end{cases}$

i) $3x+4 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, car $x \longmapsto 3x+4$ est une fonction polynôme.

ii) On résout d'abord : $x^2-1=0$

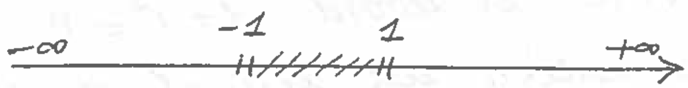
$\Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ou} \\ x+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	//////	0	$+$	

Ainsi f existe si $x^2-1>0$.



Donc $\boxed{E_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$

<u>Rappels</u>: $x \longmapsto \sin f(x)$ existe si $f(x) \in \mathbb{R}$.

$x \longmapsto \sqrt[2p]{f(x)}$ existe si $f(x) \geqslant 0$.

si $p \in \mathbb{N}^*$.

3) $$g(x) = \frac{x\, e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}x}}}{x^2-1} = \left(\frac{x}{x^2-1}\right) e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}x}}$$

g existe si $\begin{cases} x^2-1 \neq 0 & i) \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}x} \in \mathbb{R} & ii) \end{cases}$

i) On résout d'abord $x^2 - 1 = 0$

$\Longrightarrow x = \pm 1.$

ii) $\sqrt{\frac{\pi}{2}x} \in \mathbb{R} \iff \frac{\pi}{2}x \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 0.$

Ainsi, on a :

Donc $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$

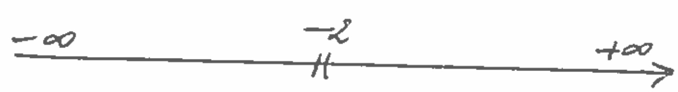
D'où $\boxed{E_g = [0, 1[\cup]1, +\infty[}$

4) $$h(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$$

h est définie si $\frac{x+1}{x+2} \in \mathbb{R}$

$\iff x + 2 \neq 0$, car $x \longmapsto \frac{x+1}{x+2}$ est une fonction rationnelle.

On résout : $x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2.$



Ainsi h est définie si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

Donc $\boxed{E_h =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[}$

Rappels : $x \longmapsto \sqrt[2p+1]{f(x)}$, $(p \in \mathbb{N}^*)$
existe si $f(x) \in \mathbb{R}$.

5) $m(x) = 2^{\sin x} \cos x$

- $\longmapsto 2^{\sin x}$ existe si $\sin x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. i)

- D'autre part, $x \longmapsto \cos x$ existe si $x \in \mathbb{R}$. ii)

Ainsi, m existe si $\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{i)} \\ x \in \mathbb{R} & \text{ii)} \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{E_m = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[}$

Rappels : $x \longmapsto \sin f(x)$ existe si $f(x) \in \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \cos f(x)$ existe si $f(x) \in \mathbb{R}$
$x \longmapsto a^{f(x)}$ existe si $f(x) \in \mathbb{R}$
si $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 2 :

Evaluons les limites indiquées :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} \cos x = ?$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, alors on a :

$$-e^{-2x} \leq e^{-2x} \cos x \leq e^{-2x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} (-e^{-2x}) \leq \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} \cos x \leq \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} \cos x.$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} \cos x \leq 0.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} \cos x = 0}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x} = ?$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x} = \frac{4 - 4}{12 - 12} = \frac{0}{0} \quad (F.I)$$

Levons cette indétermination

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{3x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{3x} = \frac{4}{6}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x} = \dfrac{2}{3}}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4+2x-4}{x^3-\sqrt{x^4-1}} = ?$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4+2x-4}{x^3-\sqrt{x^4-1}} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ (F.I)

Levons cette indétermination.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4+2x-4}{x^3-\sqrt{x^4-1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^3-\sqrt{x^4}\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^3+x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}$$, car $x \to -\infty$ $\rightarrow \sqrt{x^4} = -x^2$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}\right)}{1+\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}$$

$$= -\frac{\infty}{1}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4+2x-4}{x^3-\sqrt{x^4-1}} = -\infty}$

Exercice 3 :

Etablissons les dérivées des fonctions indiquées en utilisant la définition de la dérivée :

1) $f(x) = \tan x$.

Par définition, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

On a : $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$

Comme $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-(\tan a)(\tan b)}$

Alors $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1-\tan x \tan h} - \tan x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan x + \tan h - \tan x(1-\tan x \tan h)}{h(1-\tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\tan x} + \tan h - \cancel{\tan x} + \tan^2 x \tan h}{h(1-\tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\tan h}{h}\right)\left(\frac{1}{1-\tan x \tan h}\right) + \lim_{h\to 0} \frac{\tan^2 x \tan h}{h(1-\tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\tan h}{h}\right)\left[\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x \tan h}\right]$$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\tan h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \tan h = 0$

Ainsi $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

Donc $\boxed{f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x}$

2) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Par définition $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+3} - \sqrt{2x+3}}{h}$$

$$= \frac{0}{0} \quad (F.I)$$

Levons cette indétermination

On a :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(x+h)+3} - \sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}\right)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2x} + 2h + \cancel{3} - \cancel{2x} - \cancel{3}}{h\left(\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}\right)}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+3} + \sqrt{2x+3}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}}$

3) $f(x) = \cos 2x$

Par définition, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\Longrightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos[2(x+h)] - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2x+2h) - \cos 2x}{h}$$

Comme $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,

Alors $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos 2x(\cos 2h - 1)}{h} - \sin 2x \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{h}$$

$$= 2\cos 2x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos 2h - 1}{2h}\right) - 2\sin 2x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{2h}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

Ainsi $\boxed{f'(x) = -2\sin 2x}$

Exercice 4 :

Calculons les dérivées des fonctions indiquées :

1) $f(x) = (x+e^{x^2})^2 (x^4+e)^4$

$$f'(x) = \left[(x+e^{x^2})^2\right]'(x^4+e)^4 + \left[(x^4+e)^4\right]'(x+e^{x^2})^2$$

$$= \left[2(x+e^{x^2})'(x+e^{x^2})\right](x^4+e)^4 + \left[4(x^4+e)'(x^4+e)^3\right](x+e^{x^2})^2$$

car $(f^n(x))' = nf'(x)\, f^{n-1}(x)$.

$$= \left[2(1+2xe^{x^2})(x+e^{x^2})\right](x^4+e)^4 + \left[4(4x^3)(x^4+e)^3\right](x+e^{x^2})^2$$

car $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$ et $(x^n)' = nx^{n-1}$

Donc $\boxed{f'(x) = 2(1+2xe^{x^2})(x+e^{x^2})(x^4+e)^4 + 16x^3(x^4+e)^3(x+e^{x^2})^2}$

NB : Cette expression est factorisable.

Rappel : $f(x) = g(x)h(x)$

$$\Longrightarrow f'(x) = [g(x)h(x)]'$$

$$= g'(x)h(x) + h'(x)g(x).$$

2) $f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$

On a $f'(x) = \dfrac{[\ln(\ln x)]'}{\ln(\ln x)}$

$$= \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\ln(\ln x)}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}}$

__Rappels__ : $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$. En particulier $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3) $f(x) = \ln(2^x + xe^{x-1})$

On a $f'(x) = \dfrac{(2^x + xe^{x-1})'}{2^x + xe^{x-1}} = \dfrac{(2^x)' + (xe^{x-1})'}{2^x + xe^{x-1}}$

$$= \frac{2^x\ln 2 + (x)'e^{x-1} + x(e^{x-1})'}{2^x + xe^{x-1}}$$

$$= \frac{2^x\ln 2 + e^{x-1} + x(x-1)'e^{x-1}}{2^x + xe^{x-1}}$$

$$= \frac{2^x\ln 2 + e^{x-1} + xe^{x-1}}{2^x + xe^{x-1}}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2^x \ln 2 + (1+x)e^{x-1}}{2^x + xe^{x-1}}}$

Rappels : $\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)\, a^{f(x)} \ln a$

En particulier $(a^x)' = a^x \ln a$.

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$\Longrightarrow (e^x)' = e^x$$

4) $f(x) = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

On a $f'(x) = -\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)' \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

$$= -\left(\sqrt{\tan 3x}\right)' e^{\sqrt{\tan 3x}} \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$$

$$= -\frac{(\tan 3x)'}{2\sqrt{\tan 3x}} e^{\sqrt{\tan 3x}} \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$$

$$= -\frac{(3x)'(1+\tan^2 3x)}{2\sqrt{\tan 3x}} e^{\sqrt{\tan 3x}} \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$$

$$= -\frac{3(1+\tan^2 3x)}{2\sqrt{\tan 3x}} e^{\sqrt{\tan 3x}} \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-3\sec^2(3x)\, e^{\sqrt{\tan 3x}} \sin\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)}{2\sqrt{\tan 3x}}}$$

NB <u>Rappels</u>:

$$\left(\cos f(x)\right)' = -f'(x)\sin f(x)$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$\left(\tan f(x)\right)' = f'(x)\left(1+\tan^2 f(x)\right) = f'(x)\sec^2[f(x)]$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

5) $f(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

On a $f'(x) = \dfrac{\left(x\sqrt{x^2-1}\right)'}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(x)'\sqrt{x^2-1} + x\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} + x\left[\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}\right]}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} + x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 + x^2}{x\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-1+x^2}{x(x^2-1)}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x(x^2-1)}}$

Exercice 5:

Trouvons l'équation de la tangente à la courbe de $y = x\sqrt{5-x}$ au point $x=1$.

Par définition : $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

On a $f(x) = x\sqrt{5-x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{5-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{5-x}}$

$$= \frac{2(5-x)-x}{2\sqrt{5-x}}$$

$$= \frac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}$$

En $x=1$, on a : $\begin{cases} f'(1) = \dfrac{7}{4} \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Ainsi, $(T) : y = \frac{7}{4}(x-1) + 2$

$\Leftrightarrow (T) : 4y = 7(x-1) + 8$

Donc $\boxed{(T) : 7x - 4y + 1 = 0}$

Exercice 6 :

Par un raisonnement similaire à l'exercice 5, on montre que $(T) : y = -x + 2$.

Exercice 7 :

Exprimons $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x et y.

1) $x^2 + xy - y^3 = xy^2$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^3\right) = \frac{d}{dx}(xy^2)$$

$$\Longleftrightarrow \left(x^2 + xy - y^3\right)' = (xy^2)'$$

$$\Longrightarrow (x^2)' + (xy)' - (y^3)' = (x)'y^2 + x(y^2)'$$

Nous dérivons y tout en gardant à l'esprit que y est une fonction implicite de x c'est-à-dire $y = f(x)$.

$$\Longrightarrow 2x + (x)'y + xy' - 3y'y^2 = y^2 + 2xy'y$$

$$\Longrightarrow 2x + y + xy' - 3y'y^2 = y^2 + 2xy'y$$

$$\Longrightarrow (x - 3y^2 - 2xy)\, y' = y^2 - 2x - y$$

Donc $$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x - y}{x - 3y^2 - 2xy}}$$

2) $\tan(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\tan(x-y)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left[\tan(x-y)\right]' = \left(\frac{y}{1+x^2}\right)'$$

$$\Longrightarrow (x-y)'\sec^2(x-y) = \frac{y'(1+x^2)-(1+x^2)'y}{(1+x^2)^2} \quad ; \text{ car } y=f(x).$$

$$\Longrightarrow (1-y')\sec^2(x-y) = \frac{y'(1+x^2)-2xy}{(1+x^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \sec^2(x-y) - y'\sec^2(x-y) = \frac{y'}{1+x^2} - \frac{2xy}{(1+x^2)^2}$$

$$\Longrightarrow y'\left[\frac{1}{1+x^2} + \sec^2(x-y)\right] = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} + \sec^2(x-y)$$

$$\Longrightarrow y'\left[\frac{1+(1+x^2)\sec^2(x-y)}{1+x^2}\right] = \frac{2xy+(1+x^2)^2\sec^2(x-y)}{(1+x^2)^2}$$

Donc

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy+\left[(1+x^2)\sec(x-y)\right]^2}{(1+x^2)\left[1+(1+x^2)\sec^2(x-y)\right]}}$$

Exercice 8 :

Par dérivation implicite, trouvons l'équation de la tangente au point indiqué :

1) $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$; $(1,2)$

On a : $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$ (E)

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + 2xy - y^2 + x) = \frac{d}{dx}(2)$

$\Rightarrow 2x + 2y + 2xy' - 2y'y + 1 = 0$

$\Rightarrow 2y'(x - y) = -1 - 2x - 2y$

$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x + 2y}{2(y-x)} = \frac{1 + 2(x+y)}{2(y-x)}$

$\Rightarrow y'(1) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1 + 2(3)}{2(2-1)} = \frac{7}{2}$

L'équation de la tangente à la courbe (E) au point indiqué est :

$(T) : y = \frac{7}{2}(x-1) + 2$

$\Leftrightarrow (T) : 2y = 7x - 7 + 2$

$\Leftrightarrow \boxed{(T) : 7x - 2y - 5 = 0}$

2) On raisonne de façon analogue pour $x^2 + y^2 = 2(2x^2 + 2y^2 - x)$ en $(0, \frac{1}{2})$

Exercice 9:

Déterminons $f'(x)$ en utilisant la dérivation logarithmique.

1) $f(x) = (\tan x)^{\frac{1}{x}}$

$\Longrightarrow \ln f(x) = \ln\left[(\tan x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$\Longrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(\tan x)$; car $\ln a^r = r\ln a$

$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\ln(\tan x)\right]$

$$\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{1}{x}\right)'\ln(\tan x) + \frac{1}{x}\left[\ln(\tan x)\right]'$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(\tan x) + \frac{1}{x}\left(\frac{(\tan x)'}{\tan x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\ln(\tan x) + \frac{\sec^2 x}{x\tan x}$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{\ln(\tan x)}{x}\right]$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{\ln(\tan x)}{x}\right)f(x)$$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sec^2 x}{\tan x} - \frac{\ln(\tan x)}{x}\right)(\tan x)^{\frac{1}{x}}}$

Exercice 8 :

Déterminons $f'(x)$ en utilisant la dérivation logarithmique

2) $f(x) = (\cos x)^{\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow \ln f(x) = \sqrt{x+1}\,\ln(\cos x)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\sqrt{x+1}\,\ln\cos x\right]'$$

$$= \frac{\ln\cos x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\ln\cos x}{2\sqrt{x+1}} - \tan x\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln\cos x}{2\sqrt{x+1}} - \tan x\sqrt{x+1}\right) f(x)$$

Donc
$$\boxed{f'(x) = \left(\frac{\ln\cos x}{2\sqrt{x+1}} - \tan x\sqrt{x+1}\right)(\cos x)^{\sqrt{x+1}}}$$

3) $f(x) = \left[\ln(x^2+\pi)\right]^{\sin\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \ln f(x) = (\sin\sqrt{x})\,\ln\left[\ln(x^2+\pi)\right]$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\right)\ln\left[\ln(x^2+\pi)\right] + \sin\sqrt{x}\,\frac{\frac{2x}{x^2+\pi}}{\ln(x^2+\pi)}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln\left[\ln(x^2+\pi)\right] + \frac{2x\sin\sqrt{x}}{(x^2+\pi)\ln(x^2+\pi)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos\sqrt{x}\,\ln(\ln(x^2+\pi))}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sin\sqrt{x}}{(x^2+\pi)\ln(x^2+\pi)}\right) f(x)$$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = \left(\frac{\cos\sqrt{x}\, \ln\left(\ln(x^2+\pi)\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x \sin\sqrt{x}}{(x^2+\pi)\ln(x^2+\pi)} \right) \left(\ln(x^2+\pi)\right)^{\sin\sqrt{x}}}$$

4) $f(x) = \sqrt{x}\,(x+1)^{\frac{2}{3}}\, e^{x^2-x}$

$$\Longrightarrow \ln f(x) = \ln\sqrt{x} + \ln(x+1)^{\frac{2}{3}} + \ln e^{x^2-x}, \quad \text{car } \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x+1) + x^2 - x,$$

car $\ln e^x = x$, $\ln a^r = r\ln a$

$$\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} + \frac{2}{3(x+1)} + 2x - 1$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{3(x+1)} + 2x - 1\right) f(x)$$

Donc $\boxed{f'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{3(x+1)} + 2x - 1\right)\sqrt{x}\,(x+1)^{\frac{2}{3}}\, e^{x^2-x}}$