Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 B)

EXAMEN FINAL PRATIQUE (Hiver 2014)

Professeur: Joseph Khoury. **Durée: 3 heures**

Nom de famille: Solutions.

Prénom: ______________________

Numéro d'étudiant: ______________________

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices ne sont pas permises.

Cet examen comporte 15 questions et 16 pages. Les questions à choix multiples (1 à 10) valent chacune 2 points sur les 55 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Les questions 11 à 15 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Considérer un système linéaire non-homogène à 100 équations et 150 inconnues. Répondre aux questions suivantes.

(1) Le système peut-il être incompatible?

(2) Le système peut-il avoir une infinité de solutions?

(3) Le système peut-il avoir une solution unique?

A. Non, Non, Non **B.** Non, Oui, Oui **C.** Non, Non, Oui
D. Oui, Oui, Oui **E.** Oui, Oui, Non **F.** Non, Oui, Non

Solution (1) Oui car $rg\,A \neq rg[A\,|\,B]$ est possible.

(2) Oui car $rg(A) = rg[A\,|\,B] < 150$ est possible.

(3) Non car $rg(A) = rg[A\,|\,B] = 150$ est impossible car dans chaque ligne, il y a au plus un pivot et il y a 100 lignes.

2. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

est égal à -1, donner le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}^2.$$

A. 64 **B.** 16 **C.** −16 **D.** −36 **E.** −64 **F.** 36

Solution Tout d'abord $\det\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix} = -2\times 3 \det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ c & i & f \end{bmatrix}$

$\overset{4L_3+L_2\to L_2}{=} -6\det\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix} = -6\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$ (Transposée) $\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{=} 6\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$= 6(-1) = -6$. Alors

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}^2 = \left(\det\begin{bmatrix} -2a & -2g & -2d \\ b-4c & h-4i & e-4f \\ 3c & 3i & 3f \end{bmatrix}\right)^2 = (-6)^2 = 36$$

3. Soit $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_{22}$ une application linéaire qui satisfait:

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(1-2x+x^2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T(1-2x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver $T(2+7x-4x^2)$.

A. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

B. Aucune des autres réponses

C. $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

F. $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Solution $2+7x-4x^2 = a(1+x)+b(1-2x+x^2)+c(1-2x^2) = (a+b+c)+(a-2b)x+(b-2c)x^2$

$\Rightarrow a+b+c=2,\ a-2b=7$ et $b-2c=-4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Alors $a=3$, $b=-2$, $c=1$ et donc $T(2+7x-4x^2)$

$$= 3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Soit A et B deux matrices carrées de même format $n \times n$. Parmi les énoncés suivants, seulement deux sont **faux**. Lesquels?

(1) Si A et B sont inversibles, alors $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$ Vrai

(2) Si A et B sont inversibles, alors $\det(A^{-1}B^{-1}AB) = 1$ Vrai

(3) $(A^T B^T)^T = AB$ Faux

(4) Si A et B sont inversibles, alors $(ABA^{-1})^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$: Faux

(5) $\det(A^T B) = \det(B^T A)$: Vrai

A. (1) et (3) **B.** (2) et (4) **C.** (2) et (5)

D. (2) et (3) **E.** (3) et (4) **F.** (1) et (5)

Solution (1) Vrai $\det(A^{-1}BA) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(B) \cdot \det(A) = \det(B)$

(2) Vrai $\det(A^{-1}B^{-1}AB) = \det(A^{-1})\det(B^{-1})\det(A)\det(B) = 1$

(3) Faux $(A^T B^T)^T = (B^T)^T (A^T)^T = BA \neq AB$ en général

(4) Faux $(ABA^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}B^{-1}A^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$

(5) Vrai $\det(A^T B) = \det(A^T)\det(B) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(B^T)\det(A)$

$= \det(B^T A)$

5. A est une matrice carrée d'ordre $n \times n$ telle que sa forme échelonnée a un pivot dans chaque colonne à l'exception de la dernière colonne. Parmi les énoncés suivants, un seul est **vrai**. Lequel?

(1) Les colonnes de A forment un système générateur de $\mathbb{R}^n$ mais elles ne forment pas une base de $\mathbb{R}^n$. Faux

(2) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes mais elles ne forment pas une base de $\mathbb{R}^n$. Faux

(3) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$ mais ces colonnes sont linéairement dépendantes. Faux

(4) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$ mais elles ne forment pas un système générateur de $\mathbb{R}^n$. Faux

(5) Les colonnes de A forment un système générateur d'un sous-espace U de $\mathbb{R}^n$ mais elles ne forment pas une base de U. Vrai

(6) Le système homogène $AX = 0$ n'admet que la solution triviale. Faux car $rg(A) \neq n$

A. (3) **B.** (1) **C.** (6) **D.** (2) **E.** (4) **F.** (5)

Solution Le fait que chaque colonne, à l'exception de la dernière, a un pivot implique que $rg(A) = n-1$. Alors les colonnes de A ne sont pas l. ind. et elles ne forment pas un système générateur. Par contre, ces colonnes notées $c_1, c_2, \ldots, c_n$ forment un système générateur (pas une base) du sous-espace $U = \text{Span}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ de $\mathbb{R}^n$

6. Soit A une matrice carrée de format $n \times n$. Parmi les énoncés suivants, un seul **n'est pas équivalent** à la condition "Le déterminant de A n'est pas nul". Lequel?

A. 0 n'est pas une valeur propre de A
B. Les lignes de A sont linéairement indépendantes comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$
C. A est inversible
D. Les colonnes de A forment un système générateur de $\mathbb{R}^n$
E. Le rang de A est égal à n
F. Le système homogène $AX = 0$ admet une solution non triviale

Solution $\det(A) \neq 0 \iff A$ est inversible $\iff 0$ n'est pas une valeur propre de A $\iff$ le système homogène $AX = 0$ n'admet que la solution triviale

7. Considérer les trois fonctions f, g et h de l'espace $\mathbb{F}(]-2, +\infty[, \mathbb{R})$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}, \quad h(x) = \frac{\alpha x^2 - 8x + 2}{(x+2)(x^2+1)}.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de α, la fonction h appartient-elle à l'enveloppe linéaire des fonctions f et g?

A. N'importe quelle valeur de α
B. 3
C. 5
D. 1
E. 2
F. Aucune des autres réponses

Solution $h(x) = a f(x) + b g(x) \quad \forall x \in]-2, +\infty[\Rightarrow$

$$\frac{\alpha x^2 - 8x + 2}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b(3x+2)}{x^2+1} = \frac{ax^2 + a + b(3x^2+8x+4)}{(x+2)(x^2+1)} \Rightarrow$$

$$\alpha x^2 - 8x + 2 = (a+3b)x^2 + 8bx + a + 4b \Rightarrow \underset{1}{a+3b = \alpha}, \quad \underset{2}{8b = -8} \text{ et}$$

$\underset{3}{a + 4b = 2}$. (2) et (3) $\Rightarrow a = 6, \; b = -1$

(1) $\Rightarrow \alpha = 6 + 3(-1) = 3$

8. Lequel des ensembles suivants forme une base de l'espace $\mathbb{P}_3$ (polynômes de degré au plus 2):

A. $\{1, 1-x, 1-x^2, 1+x^2, 1+x+x^3\}$
B. $\{0, 1+x, 2+x+x^2, x-x^3\}$
C. $\{1, 1-x, x+x^2, 1+x^3\}$
D. $\{1+x^2+x^3, \; 1-x+2x^3\}$
E. $\{-3, x+x^2, 1+x^2+x^3, -2+2x+3x^2+x^3\}$
F. $\{1-x, \; 1+x+x^2, 1+x^3\}$

Solution Noter tout d'abord que $\dim \mathbb{P}_3 = 4$. Donc chaque base de $\mathbb{P}_3$ doit contenir 4 polynômes linéairement indépendants.

Ceci élimine tout de suite les choix A, D et F.

La réponse B contient le vecteur nul, donc les polynômes sont automatiquement dépendants

Dans la réponse E, noter que $-3 + 2(x+x^2) + 1 + x^2 + x^3 = -2 + 2x + 3x^2 + x^3$

Donc, $\{-3, x+x^2, 1+x^2+x^3, -2+2x+3x^2+x^3\}$ est linéairement dependant donc pas une base

9. Considérer le sous-ensemble U suivant de l'espace $\mathbb{P}_3$ (polynômes de degré au plus 3 à coefficients réels):

$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_3;\ p(-1) = 2p(1) \text{ et } p(0) = 0\}.$$

Parmi les énoncés suivants, un seul est vrai. Lequel?

(1) U est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 0
(2) U est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 1
(3) U est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 2
(4) U est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 3
(5) U est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 4
(6) U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{P}_3$

A. (6) **B.** (5) **C.** (1) **D.** (3) **E.** (4) **F.** (2)

Solution $U = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;\ p(-1) = 2p(1) \text{ et } p(0) = 0\} =$
$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 2(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \text{ et } a_0 = 0\}$
$= \{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;\ 3a_1 + a_2 + 3a_3 = 0\} = \{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;\ a_2 = -3a_1 - 3a_3\}$
$= \{a_1x + (-3a_1 - 3a_3)x^2 + a_3x^3\} = \{a_1(x - 3x^2) + a_3(-3x^2 + x^3);\ a_1, a_1 \in \mathbb{R}\}$
$= \text{Span}\{x - 3x^2, -3x^2 + x^3\}$. De plus $x - 3x^2$ et $-3x^2 + x^3$ sont l. ind car l'un n'est pas un multiple de l'autre. Alors $\dim U = 2$.

10. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace des fonctions $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, seulement deux sont des sous-espaces de $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Lesquels?

$$U = \{f \in V;\ f(0) \geq 0\}$$
$$V = \{f \in V;\ f(0) - 3f(1) = 0\}$$
$$S = \{f \in V;\ f(-x) + f(x) = 0\}$$
$$T = \{f \in V;\ f(-1)f(0) = 0\}$$

A. U et S **B.** U et T **C.** V et T
D. S et T **E.** U et V **F.** V et S

Solution

U n'est pas un sous-espace $f(x) = x+1 \in U$ car $f(0) = 1 \geq 0$ mais $-2f = -2x-2 \notin U$

V est un sous-espace ① La fonction nulle Θ satisfait $\Theta(0) - 3\Theta(1) = 0 \Rightarrow \Theta \in V$
② si $f, g \in V \Rightarrow (f+g)(0) - 3(f+g)(1) = f(0) - 3f(1) + g(0) - 3g(1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in V$
③ si $f \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha f)(0) - 3(\alpha f)(1) = \alpha[f(0) - 3f(1)] = \alpha . 0 = 0 \Rightarrow \alpha f \in V$

S est un sous-espace ① La fonction nulle Θ satisfait $\Theta(-x) = \Theta(x) = 0 \Rightarrow \Theta \in S$
② si $f, g \in S \Rightarrow (f+g)(-x) + (f+g)(x) = f(-x) + f(x) + g(-x) + g(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in S$
③ si $f \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha f)(-x) + (\alpha f)(x) = \alpha[f(-x) + f(x)] = \alpha . 0 = 0 \Rightarrow \alpha f \in S$

T n'est pas un sous-espace $f(x) = x+1 \in T$, $g(x) = x \in T$ mais $f+g = 2x+1 \notin T$

11. **[10 points] Les cinq parties de cette question sont indépendantes et valent 2 points chaque.**

(1) La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.

(2) Pour quelle(s) valeur(s) de α, les vecteurs

$$(1,0,2,0), (1,1,0,3), (1,1,1,-2), (5,3,5,\alpha)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

(3) Soit A, B et C trois matrices carrées d'ordre 4 chacune telles que $\det(A) = -2$, $\det(B) = 2$ et $\det(C) = -1$. Trouver le déterminant de la matrice

$$-\left(B^T\right)^2 A^3 \left(B^{-1}\right)^2 A^{-1} \left(C^{-1}\right)^T.$$

(4) Considérer le système linéaire $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α, le système admet-il une infinité de solutions?

(5) A est une matrice de format 1000×999 telle que son rang est égal à 500. Combien de paramètres dans la solution générale du système homogène $AX = 0$?

<u>Solution</u> (1) $\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2$. Alors la seule valeur propre de A est $\lambda = 2$.

E_2 : $(A-2I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $x_1 = t$ est libre et $x_2 = 0$

Alors $E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Donc $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de E_2. En particulier $\dim E_2 = 1 < 2$. Donc A n'est pas diagonalisable.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_3 \to L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_2+L_3 \\ -3L_2+L_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha-9 \end{bmatrix} \underset{5L_3+L_4 \to L_4}{\sim}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-4 \end{bmatrix}$ Les vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow$ ils sont linéairement indépendants (car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$) $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = 4 \Leftrightarrow \alpha - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 4$

(3) $\det\left[-(B^T)^2 A^3 (B^{-1})^2 A^{-1} (C^{-1})^T\right] = (-1)^4 \left(\det(B^T)\right)^2 (\det A)^3 \left(\det(B^{-1})\right)^2 \det(A^{-1}) \det(C^{-1})^T$

$$= \cancel{(\det B)^2}\cancel{(\det A)^3}\frac{1}{\cancel{(\det B)^2}}\frac{1}{\cancel{\det A}}\frac{1}{\det(C)} = \frac{(\det A)^2}{\det(C)} = \frac{(-2)^2}{-1} = \boxed{-4}$$

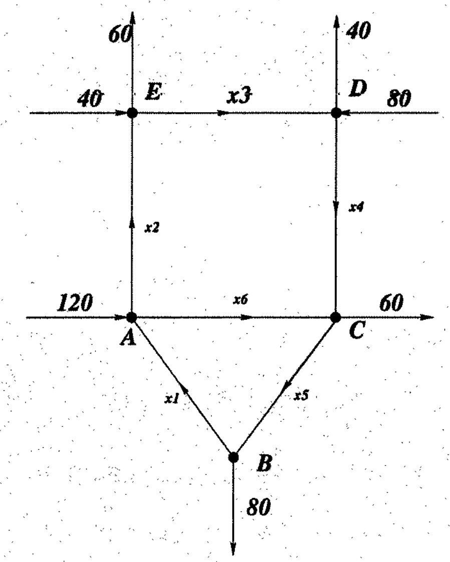
(4) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1-2\alpha & 4-3\alpha \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1-2\alpha & 4-3\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha+2 & 3\alpha+3 \end{array}\right]$$

Le système admet une infinité de solutions $\iff$ $rg\, A = rg\, [A|B] = 2$

$\iff$ $2\alpha+2 = 3\alpha+3 = 0$ $\iff$ $\boxed{\alpha = -1.}$

(5) # paramètres = # inconnues $-$ $rg(A) = 999 - 500 = \boxed{499}$

12. **[6 points]** Le diagramme suivant représente un réseau routier où les lettres A, B, C, D et E représentent les intersections, les flèches indiquent le sens du traffic. Les nombres et les variables x_i autour des flèches indiquent le nombre de voitures qui passent par l'intersection durant la même période du temps.



(1) Écrire le système (S) d'équations linéaires qui décrit le réseau. Indiquer aussi toutes les contraintes sur les variables x_i. **Pour cette partie, n'effectuer aucune réduction du système. Juste donner le système (S) avec les contraintes. La réduction de la matrice augmentée du système est faite pour vous à la partie suivante.**

(2) Sachant que la **forme échelonnée réduite** de la matrice augmentée du système (S) est:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

donner la solution générale du Système (S) (Ignorer les contraintes sur les variables pour cette partie).

(3) Si le chemin AC est fermé pour la construction, déterminer le flux minimal le long du chemin AE **en utilisant vos réponses à la partie (2)**. Vous devez justifier vos réponses.

Solution Pour chaque intersection : Tout rentrant = Tout sortant

A $\quad x_1+120 = x_2+x_6$

B $\quad x_5 = x_1+80$

C $\quad x_4+x_6 = x_5+60$

D $\quad x_3+80 = x_4+40$

E $\quad x_2+40 = x_3+60$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2-x_6=-120 \\ x_1-x_5=-80 \\ x_4-x_5+x_6=60 \\ x_3-x_4=-40 \\ x_2-x_3=20 \end{cases}$$

Chaque x_i est un entier non négatif

(2) D'après la forme échelonnée réduite, on voit que $x_5 = s$, $x_6 = t$ sont deux variables libres. De plus :

$x_1 = s - 80$, $x_2 = s - t + 40$, $x_3 = s - t + 20$, $x_4 = s - t + 60$

s, t sont deux entiers ≥ 0.

(3) AC fermé $\Rightarrow x_6 = t = 0. \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s - 80 \\ x_2 = s + 40 \\ x_3 = s + 20 \end{cases}$ et $x_4 = s + 60$

Noter que $x_1 \geq 0 \Rightarrow s - 80 \geq 0 \Rightarrow s \geq 80$.

Le flux le long du chemin AE est $x_2 = s + 40$.

Comme $s \geq 80$, alors $x_2 = s + 40 \geq 120$.

Le flux minimal est alors $\boxed{x_2 = 120}$

13. [6 points] Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Donner le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de cette matrice.

(b) Pour chacune des valeures propres trouvées à la partie (a), donner une base de l'espace propre associé.

(c) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

(d) Trouver une matrice inversible Q différente de la matrice P (trouvée à la partie précédente) et une matrice diagonale S différente de la matrice D (trouvée à la partie précédente) telle que $A = QSQ^{-1}$

<u>Solution</u> (a) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \overset{(-1)L_2 + L_3 \to L_3}{=}$

$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda+2 & -\lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda+2) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{C_2 + C_3 \to C_3}{=}$

$(\lambda+2) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(-1) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} =$

$-(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1)$. Les valeurs propres de A sont alors $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$.

(b) E_{-2} : $(A+2I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Alors $x_2 = s$, $x_3 = t$ sont libres et $x_1 = -s-t$.

$E_{-2} = \left\{ \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Comme les vecteurs $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (l'un n'est pas un multiple de l'autre) ;

ils forment une base de E_{-2}. Donc $\dim E_{-2} = 2$.

$\underline{E_1}$: $(A-I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $x_3 = t$ est libre

$x_1 = t$, $x_2 = t$

$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Alors $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base

de E_1 et $\dim E_1 = 1$.

(c) Comme $\dim E_{-2} + \dim E_1 = 3$, la matrice A est diagonalisable.

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$

(d) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, alors $A = QSQ^{-1}$

14. [**7 points**] Soit

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ 2x + 3y - z + w = 0\}.$$

(1) Montrer que U est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

(2) Trouver une base et donner la dimension de U.

(3) Utiliser le procédé de **Gram-Schmidt** pour trouver une base orthogonale de U.

(4) Soit $v = (1,\ 0,\ 0,\ 0) \in \mathbb{R}^4$. Donner la meilleur approximation de v par un vecteur de U.

~~(5) Donner un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui soit orthogonal à tout vecteur du sous-espace U.~~

<u>Solution</u> (1) $U = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ z = 2x+3y+w \} =$

$\{ (x,y,2x+3y+w,w)\ ;\ x,y,w \in \mathbb{R} \} = \{ x(1,0,2,0)+y(0,1,3,0)+w(0,0,1,1);$

$x,y,w \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{ (1,0,2,0), (0,1,3,0), (0,0,1,1) \}$. Alors U est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

(2) Les vecteurs $(1,0,2,0), (0,1,3,0), (0,0,1,1)$ forment un système générateur de U, on montre que les vecteurs sont aussi linéairement indépendants:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rg(A) = rg[A|B] = \#$ inconnues $= 3$. Alors solution unique (solution triviale). Alors, les 3 vecteurs sont l. ind. Ils forment alors une base de U et $\dim U = 3$.

(3) $v_1 = (1,0,2,0)$, $v_2 = (0,1,3,0)$, $v_3 = (0,0,1,1)$

Par le Procédé de Graham-schmidt:

$e_1 = v_1 = (1,0,2,0)$

$e_2 = v_2 - \dfrac{v_2 \cdot e_1}{\|e_1\|^2} e_1 = (0,1,3,0) - \dfrac{(0,1,3,0)\cdot(1,0,2,0)}{5}(1,0,2,0)$

$= (0,1,3,0) - \dfrac{6}{5}(1,0,2,0) = \left(-\dfrac{6}{5}, 1, \dfrac{3}{5}, 0\right)$

$$e_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot e_1}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{v_3 \cdot e_2}{\|e_2\|^2} e_2 = (0,0,1,1) - \frac{(0,0,1,1)\cdot(1,0,2,0)}{5}(1,0,2,0)$$

$$- \frac{(0,0,1,1)\cdot(-6/5, 1, 3/5, 0)}{\frac{14}{5}} \left(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0\right) =$$

$$(0,0,1,1) - \frac{2}{5}(1,0,2,0) - \frac{3}{14}\left(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0\right) = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1\right)$$

Alors $\left\{(1,0,2,0), \left(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0\right), \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1\right)\right\}$ est une base orthogonale de U.

(4) La meilleure approximation de v par un vecteur dans U est donnée par $\mathrm{proj}_U v = \frac{v \cdot e_1}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{v \cdot e_2}{\|e_2\|^2} e_2 + \frac{v \cdot e_3}{\|e_3\|^2} e_3 =$

$$\frac{(1,0,0,0)\cdot(1,0,2,0)}{5}(1,0,2,0) + \frac{(1,0,0,0)\cdot(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0)}{\frac{14}{5}}\left(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0\right) +$$

$$\frac{(1,0,0,0)\cdot(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1)}{\frac{105}{98}}\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1\right) =$$

$$\frac{1}{5}(1,0,2,0) - \frac{3}{7}\left(-\frac{6}{5}, 1, \frac{3}{5}, 0\right) - \frac{14}{105}\left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1\right) = \left(\frac{11}{15}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{15}\right)$$

(5) Le vecteur $v - \mathrm{proj}_U v$ est orthogonal à tout vecteur dans U.

$$v - \mathrm{proj}_U v = (1,0,0,0) - \left(\frac{11}{15}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

15. **[6 points]** Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel α, la matrice A est-elle **inversible**?

(b) Pour le reste, utiliser $\alpha = 1$.

(i) Utiliser l'Algorithme de Gauss-Jordan pour trouver A^{-1}.

(ii) Trouver la matrice B telle que

$$\left(\frac{1}{2}B^T - 2I_4\right)^{-1} = A$$

où I_4 est la matrice identité de format 4×4.

(iii) **Utiliser la matrice** A^{-1} trouvée en (i) pour résoudre le système linéaire $AX = C$ où

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Solution (a) $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$

(en développant le déterminant selon la 4ème ligne) $= (-1)\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & -1 \end{bmatrix}$

$= (-1)\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha-2 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\left[1 - (\alpha-2)\right] = \alpha - 3.$

A est inversible $\iff \det(A) \neq 0 \iff \boxed{\alpha \neq 3}$

(b) $\alpha = 1$

i) $[A \mid I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \text{ Alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) $\left(\frac{1}{2}B^T - 2I_4\right)^{-1} = A \iff \frac{1}{2}B^T - 2I_4 = A^{-1} \Rightarrow B^T = 2A^{-1} + 4I_4$

$$= 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii) $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$