

## Exercices suggérés

1) Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont sous forme échelonnée, sous forme échelonnée réduite et sous forme non échelonnée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 13 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 224 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) On considère les matrices  $A$  et  $B$  suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Réduire  $A$  et  $B$  sous forme échelonnée réduite et indiquer leurs colonnes pivots.
- On suppose que  $B$  est la matrice complète d'un système linéaire. Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble de solutions de ce système.

3) Résoudre les systèmes suivants en appliquant la méthode du pivot de Gauss à leur matrice complète:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 &- 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 &- 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 &+ 6x_2 - x_3 = 7 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 & & & - 2x_4 = -3 \\ & 2x_2 + 2x_3 & & = 0 \\ & & x_3 + 3x_4 & = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \end{aligned}$$

4) Déterminer une relation entre  $g$ ,  $h$  et  $k$  de façon que le système dont la matrice complète est la suivante soit compatible.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

5) Pour chacun des systèmes suivants, choisir des valeurs pour  $h$  et  $k$  de façon que le système

- (i) n'ait pas de solution ;
- (ii) ait une solution unique ;
- (iii) ait une infinité de solution.

$$a) \quad \begin{array}{l} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{array} \quad b) \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{array}$$

6) Dire si les affirmations proposées sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

- a) On ne peut appliquer la méthode du pivot qu'à des matrices complètes de systèmes linéaires.
- b) Une inconnue principale est une inconnue qui correspond à une colonne pivot dans la matrice des coefficients du système.
- c) Il revient au même de trouver une représentation paramétrique de l'ensemble de solution d'un système et de résoudre le système.
- d) Si l'une des lignes d'une forme échelonnée d'une matrice complète d'un système est  $[0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0]$ , alors le système associé est compatible.
- e) Si toutes les colonnes d'une matrice complète contiennent un pivot, alors le système correspondant est compatible.
- f) Si un système possède des inconnues non principales, alors le système a plusieurs solutions.

7) On appelle parfois un système linéaire avec moins d'équations que d'inconnues un système sous-déterminé. Un tel système peut-il avoir une solution unique?

8) On appelle parfois un système linéaire avec plus d'équations que d'inconnues un système surdéterminé. Un tel système peut-il être compatible? Illustré la réponse par un exemple de trois équations à deux inconnues.

9) On appelle **rang** d'une matrice  $M$ , on note  $\mathbf{rg}(M)$ , le nombre de colonne pivot dans une forme échelonnée de la matrice  $M$ . Déterminer le rang des matrecices  $A, B, C, D, E, F, G$  et  $H$  de l'exercice 1.

10) Soient  $A$  la matrice des coefficients d'un système linéaire de  $m$  équation(s) et  $n$  incon-  
nue(s) et  $b$  le vecteur des seconds membres.

- (i) Justifier l'inégalité

$$rg(A) \leq rg([A|b]) \leq rg(A) + 1 \quad \text{et} \quad rg(A) \leq m.$$

- (ii) On suppose que le système est compatible, justifier que  $rg([A|b]) = rg(A)$ .
- (iii) On suppose que le système admet une seule solution, justifier que  $rg([A|b]) = rg(A) = n$ .
- (iv) On suppose que le système admet une infinité de solutions, justifier que  $rg([A|b]) = rg(A) < n$ .
- (v) On suppose que le système est incompatible; justifier que  $rg(A) < rg([A|b])$ ?
- (vi) On suppose que  $A$  est la matrice des coefficients du système suivant

$$\begin{aligned} x + fy + z &= 1 \\ x - y + z &= g \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} ,$$

d'inconnues  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Déterminer  $rg(A)$  et  $rg([A|b])$  en fonction des valeurs de  $f$  et  $g$ . Quelles sont les valeurs de  $f$  et  $g$  si le système a une infinité de solution? Déterminer l'ensemble de solutions du système dans ce cas.

- 11) Écrire un système d'équations linéaires équivalent à l'équation vectorielle suivante

$$x_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} .$$

- 12) On considère les vecteurs suivants :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

Déterminer la ou les valeurs de  $h$  telles que  $\mathbf{y}$  appartienne à  $\text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ .

- 13) Donner une interprétation géométrique de  $\text{Vect}\{a_1, a_2, a_3\}$ , pour

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} .$$

- 14) On considère le système linéaire non-homogène suivant

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

- a. Donner une représentation paramétrique vectorielle de l'ensemble de solutions du système homogène associé

- b. Vérifier que  $(-2, 1, 0)$  est une solution particulière de ce système non-homogène.
- c. Dédire des questions (a) et (b) une représentation paramétrique vectorielle de l'ensemble de solutions du système non-homogène.