Université d'Ottawa

Départment de Mathématiques et Statistiques

MAT 1702A : Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdellah Sebbar

Examen Partiel 3

27 mars 2015

Nom ________________________ Prénom ______________________

Numéro d'étudiant ______________________

Instructions :

(a) Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.

(b) Ecrivez votre numéro d'étudiant sur chaque feuille dans l'espace correspondant.

(c) Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.

(d) Tout le travail qui va être considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et l'indiquer **clairement**.

(e) L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.

(f) Il est recommendé d'écrire en stylo et non en crayon.

(g) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.

Bonne chance !

SVP ne pas écrire dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Maximum	4	4	4	5	5	3	3	28
Note								

QUESTION 1. [**4 points**] Pour chacune des ensembles suivants, écrivez 'Oui" si l'ensemble est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ pour le n indiqué, et écrivez 'Non' si l'ensemble n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ pour le n indiqué. Vous recevez 0.5 points pour chaque réponse correcte, vous perdez 0.5 points pour chaque réponse incorrecte, et vous recevez 0 s'il n'y a aucune réponse.

Oui Le Vect de 6 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, $n = 4$.

Oui L'ensemble des solutions d'un système homogène à n variables. Ici n peut être n'importe quel nombre positif.

Oui L'ensemble $\{(2x + 3y, 2y - z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $n = 3$.

Non L'ensemble $\{(x, y, x + y, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $n = 4$.

Non Le noyau d'une matrice 4×5, $n = 4$.

Y L'ensemble image d'une matrice 7×8, $n = 7$.

N Une droite dans $\mathbb{R}^2$ qui ne passe pas par l'origine, $n = 2$.

Y Un plan dans $\mathbb{R}^3$ qui contient l'origine, $n = 3$.

QUESTION 2. [**4 points**] Pour chacun des énoncés suivants, indiquez si c'est vrai (V) ou faux (F). Vous recevez 0.5 points pour chaque réponse correcte, vous perdez 0.5 points pour chaque réponse incorrecte, et vous recevez 0 s'il n'y a aucune réponse.

F $\{\vec{0}\}$ est une base de $\{\vec{0}\}$.

V Un sous-espace peut avoir plus d'une base.

V Pour toute matrice A $n \times m$, l'égalité $\operatorname{rang} A + \dim \ker A = m$ est satisfaite.

V Si toutes les entrées d'une matrice A $n \times n$ sont des nombres entiers, alors le déterminant de A est un nombre entier.

V Tout polynôme admet une racine complexe.

F Le produit de deux nombres imaginaires est un nombre imaginaire.

F Si V est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors toute base de V admet n vecteurs.

F Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^5$ sont toujours linéairement indépendants.

Question 3. [**4 points**] Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 10 & -2 & 17 & 25 & -18 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -10 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Solution: On développe le long de la 2ème colonne :

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Puis on développe le long de la 3ème colonne :

$$\det A = (-2)(-3) \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Après, on développe le long de la 3ème ligne.

$$\begin{aligned} \det A &= 6 \left(-1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= 6\Big(-1\big((-2)2 - (-1)3\big) - 2\big((-3)2 - (-1)5\big)\Big) = 6\big(-(-1) - 2(-1)\big) = 18 \end{aligned}$$

Question 4. [**5 points**] Trouver une base de

$$\mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\-4\\0\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\4\\5\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\4\\2\\4\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\5\\10\\16\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3\\-1\\4\\5\end{bmatrix}\right\}$$

Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

Solution: On forme la matrice qui a ces vecteurs comme colonnes et on cherche les colonnes pivots :

$$\begin{bmatrix}2&-4&-1&4&3&-1\\2&-4&4&4&5&-3\\0&0&5&2&10&-1\\0&0&0&4&16&4\\-2&4&1&-4&-3&5\end{bmatrix}\xrightarrow[L_1+L_5]{-L_1+L_2}\begin{bmatrix}2&-4&-1&4&3&-1\\0&0&5&0&2&-2\\0&0&5&2&10&-1\\0&0&0&4&16&4\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_3}\begin{bmatrix}2&-4&-1&4&3&-1\\0&0&5&0&2&-2\\0&0&0&2&8&1\\0&0&0&4&16&4\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-2L_3+L_4}\begin{bmatrix}2&-4&-1&4&3&-1\\0&0&5&0&2&-2\\0&0&0&2&8&1\\0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2L_4+L_5}\begin{bmatrix}2&-4&-1&4&3&-1\\0&0&5&0&2&-2\\0&0&0&2&8&1\\0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

On voit que les 1ère, 3ème, 4ème et 6ème colonnes sont des colonnes pivots. Donc une base est donnée par

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\4\\5\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\4\\2\\4\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-3\\-1\\4\\5\end{bmatrix}\right\}.$$

Par suite, la dimension est 4.

Question 5. [**5 points**] Trouver une base du noyau de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quel est rang B ?

Solution: On réduit la matrice en forme échelonnée réduite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_3+L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & & & + & 4x_3 & & & - & 2x_5 & - & 3x_6 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & + & 3x_6 & = & 0 \end{array}$$

La solution générale est

$$\begin{aligned} x_1 &= -4x_3 + 2x_5 + 3x_6 \\ x_2 &= 2x_3 - x_5 - x_6 \\ x_4 &= x_5 - 3x_6 \end{aligned}$$

En forme paramétrique :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3, x_5, x_6 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, une base de ker A est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matrice B admet 3 pivots. D'où, rank $B = 3$.

Question 6. [**3 points**] Supposons que $z = 3 - 2i$ et $w = -3 - 4i$. Calculer

$$\bar{z}w \quad \text{et} \quad \frac{z}{w}.$$

Ecrire votre réponse sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution: On a

$$\bar{z}w = \overline{(3-2i)}(-3-4i) = (3+2i)(-3-4i) = -9 - 12i - 6i + 8 = -1 - 18i$$

et

$$\frac{z}{w} = (3-2i) \cdot \frac{-3+4i}{9+16} = \frac{-9+12i+6i+8}{25} = \frac{-1}{25} + \frac{18}{25}i.$$

Question 7. [**3 points**] Supposons que A, B, et C sont des matrices 3×3 inversibles avec $\det A = 2$ et $\det C = -2$. De plus, supposons que

$$X = 2AB^TCB^{-1}A.$$

(a) Calculer $\det X$.

Solution: On a

$$\begin{aligned} \det X = \det(2AB^TCB^{-1}A) &= 2^3(\det A)(\det B^T)(\det C)(\det B^{-1})(\det A) \\ &= 8 \cdot 2 \cdot (\det B) \cdot (-2) \cdot (\det B)^{-1} \cdot 2 = -64 \end{aligned}$$

(b) Est-ce que X est inversible ?

Solution: Oui, X est inversible puisque son déterminant est non nul.