Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702A : Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdellah Sebbar

Test 3 – le 21 mars 2014

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant ______________________

Instructions :

(a) L'examen est d'une durée de 80 minutes.

(b) Le nombre de points pour chaque question est indiqué entre les parenthèses carrées.

(c) Vous devez tout justifier.

(d) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme papier brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction.

(e) Ecrivez votre numéro d'étudiant au haut de chaque feuille.

(f) Aucune note de cours, aucune calculatrice ni papier brouillon n'est permis.

(g) Bonne chance !

Ne pas écrire dans le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Maximum	3	3	2	4	5	4	4	25
Note								

QUESTION 1. **[3 points]** Lesquels des ensembles suivants sont des espaces de $\mathbb{R}^n$ pour le n donné.

(a) $\{(2a, 3b-4a, -2b+1, 5c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $n = 4$.

(b) $\{(2x, 0, -3y + x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $n = 3$.

(c) L'ensemble image d'une matrice 6×3, $n = 6$.

(d) Le noyau d'une matrice 5×4, $n = 5$.

(e) L'ensemble des solutions d'un système homogène avec 4 variables et 6 equations, $n = 4$.

(f) $\{(x, y) \mid 2x + y = 2\}$, $n = 2$.

Solution: (b)**,** (c)**,** (e)

QUESTION 2. **[3 points]** Calculer les expressions suivantes et les mettre sous la forme $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\begin{vmatrix} 2+3i & 4i \\ -3 & 3-i \end{vmatrix}$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 2+3i & 4i \\ -3 & 3-i \end{vmatrix} = (2+3i)(3-i) - (4i)(-3) = 6 - 2i + 9i + 3 + 12i = 9 + 19i$$

(b) $\dfrac{2-i}{3+4i}$

Solution:

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i-4}{9+16} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

QUESTION 3. **[2 points]** Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ? Vous devez indiquer *toutes* les propositions vraies. (Vous perdez des points si vous indiquez des propositions fausses, sans pour autant obtenir une note négative sur cette question.)

(a) La dimension de $\operatorname{Ker} A$ est le nombre de pivots de la matrice A.

(b) Si A est une matrice $m \times n$, alors $\operatorname{rank} A + \dim \ker A = n$.

(c) Une matrice $n \times n$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rank} A = n$.

(d) Une matrice carrée est inversible si et seulement si sa transposée est inversible.

(e) Si A est une matrice carrée, alors $\operatorname{Im} A$ a la même dimension que $\operatorname{Ker} A$.

Solution: (b), (c), (d)

QUESTION 4.

(a) **[2 points]** Supposons que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5.$$

Quel est

$$\begin{vmatrix} -4a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ -4a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ -4a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}?$$

Solution: Puisque la 2ème matrice est obtenue à partir de la 1ere en multipliant la 1ere colonne par -4 et échangeant la 2eme et la 3eme colonnes, le déterminant de la 2ème matrice est $(-4)(-1)(5) = 20$.

(b) **[2 points]** Supposons A, B, et C sont des matrices 4×4 avec $\det A = -1$, $\det B = 3$ et $-2B^{-1}A^TCB^T = I$. Quel est le déterminant de C ?

Solution: On a

$$\begin{aligned} \det(-2B^{-1}A^TCB^T) &= \det I = 1 \\ \implies (-2)^4(\det B)^{-1}(\det A^T)(\det C)(\det B^T) &= 1 \\ \implies (16)(\det A)(\det C) &= 1 \\ \implies (16)(-1)(\det C) &= 1 \\ \implies \det C &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Question 5. [**5 points**] Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution: On développe le long de la 4ème ligne pour obtenir

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Après, on développe le long de la 2ème colonne pour obtenir

$$\det A = -2 \times 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Puis On développe le 1er déterminant le long de la 3ème colonne et le 2ème le long de la 3ème ligne pour obtenir

$$\det A = 10 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 120 - 56 = 64.$$

QUESTION 6. [**4 points**] On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouver une base de Ker A

Solution: La matrice est déjà en forme échelonnée, sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Pour trouver une base de Ker A, on doit alors résoudre le système homogène correspondant

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 3x_4 \qquad &= 0 \\ +x_3 - 4x_4 \qquad &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

avec x_2 et x_4 libres. On a alors

$$\begin{cases} x_1 & = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 & = x_2 \\ x_3 & = 4x_4 \\ x_4 & = x_4 \\ x_5 & = 0 \end{cases}$$

La solution du système homogène sous forme vectorielle est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc une base du noyau de A est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Trouver la dimension de Ker A.

Solution: dim Ker A=2.

[**4 points**] On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -2 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}.$$

(a) Trouver une base de $\operatorname{Im} A$.

Solution: On réduit la matrice en forme échelonnée et on trouve

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes 1, 2 et 5 sont les colonnes pivots et donc les colonnes correspondantes dans la natrice A forment une base de $\operatorname{Im} A$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Trouver le rang de A.

Solution: $\operatorname{rg} A = 3$