

Chapter 1

Généralité sur les vecteurs de \mathbb{R}^n

La notion de *vecteurs* apparaît dans des contextes mathématiques ou physique très variés, qui seront abordés plus tard dans un chapitre particulier. Dans ce chapitre, nous présenterons les vecteurs de \mathbb{R}^n comme une liste ordonnée de nombres. Les notions abordées permettront d'interpréter d'importants résultats dans les prochains chapitres.

1.1 Définitions et propriétés algébriques

1.1.1 Vecteurs de \mathbb{R}^2

\mathbb{R}^2 , appelé plan cartésien, désigne l'ensemble des couples (a, b) de réels:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Les éléments de \mathbb{R}^2 sont appelés points. Un point $M(x, y)$ de \mathbb{R}^2 est entièrement spécifié par ses coordonnées x et y . La figure suivante montre trois points $A(-2, -1)$, $B(3, -1)$ et $C(2, 2)$ dans le plan.

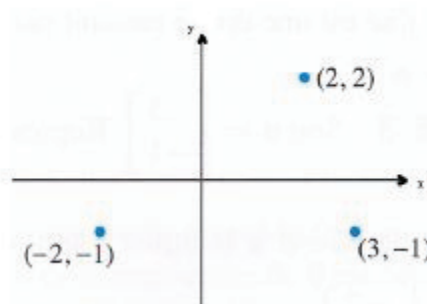


Figure 1.1: Points dans le plan.

A deux points quelconque $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ du plan on fait correspondre un segment de droite orienté (une flèche) d'origine A et d'extrémité B , noté \overrightarrow{AB} et appelé *vecteur* AB . Le mot *segment de droite orienté* dans ce contexte indique qu'un vecteur du plan est

caractérisé par une direction, un sens et une longueur. En occurrence, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour direction la droite (AB) , pour sens de A vers B et pour longueur celle du segment AB .

Le vecteur \overrightarrow{AB} est représenté par le tableau à une colonne $\begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$ qui à son tour peut être identifié au point du plan de coordonnées $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Par exemple, si $A(1, 2)$ et $B(2, 0)$ alors on note $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$. Si les points A et B sont confondus, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et on parle de *vecteur nul*.



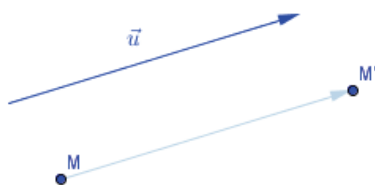
Figure 1.2: Exemples de vecteurs.

Egalité de deux vecteurs de \mathbb{R}^2

Il est donc évident que plusieurs vecteurs de \mathbb{R}^2 peuvent avoir un même représentant. Par conséquent, *on dira que deux vecteurs sont égaux (identiques) s'ils ont le même représentant*. En d'autre terme, si $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$. L'égalité de deux vecteurs ne dépend pas des points d'extrémités et des points d'origines de ces deux vecteurs. Géométriquement, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux équivaut à dire qu'ils ont même direction, même sens et même longueur et par conséquent le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Addition et multiplication par un scalaire

Etant donné un point M et un vecteur \vec{u} du plan, il existe un unique point M' du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point M' est appelé image du point M par la translation du vecteur \vec{u} .



Definition 1.1.1. La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur associé à la translation de vecteur \vec{u} suivie de la translation de vecteur \vec{v} ; on note ce nouveau vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

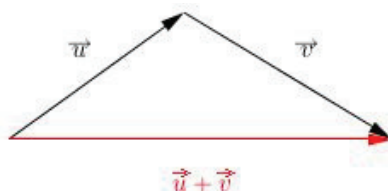


Figure 1.3: Somme de deux vecteurs.

1. La somme de deux vecteurs obéit à la règle du parallélogramme: si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

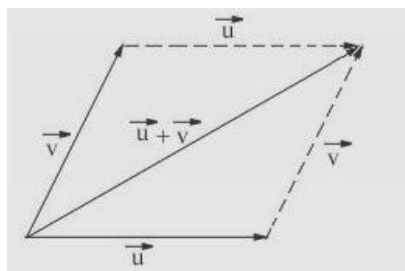


Figure 1.4: Règle du parallélogramme

2. Si \vec{u} est un vecteur de \mathbb{R}^2 et k un réel, alors $k\vec{u}$ est un vecteur de même direction et de même sens (si $k > 0$ sinon de sens opposé) que \vec{u} et dont la longueur est $|k|$ fois la longueur de \vec{u} . Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ est dit colinéaire au vecteur \vec{u} .

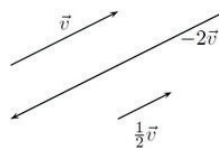
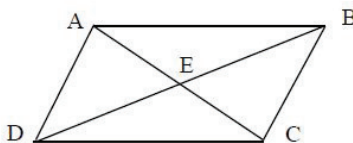


Figure 1.5: Produit d'un vecteur par un scalaire

Exemple 1.1.2. Considérer le parallélogramme $ABCD$ de centre E de la figure suivante. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{EB} en fonction des vecteurs \overrightarrow{DA} et \overrightarrow{DC} .



Solution. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme on a immédiatement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$. D'après la définition de la somme de deux vecteurs on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$. La règle du parallélogramme implique que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ et puisque $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ on déduit que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

1.1.2 Vecteurs de \mathbb{R}^3

\mathbb{R}^3 , appelé espace à trois dimensions, désigne l'ensemble de tous les triplets (x, y, z) de réels:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Un point $M(x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 est spécifié par ses trois coordonnées x, y et z . La figure suivante montre la représentation d'un point $M(x, y, z)$ dans \mathbb{R}^3 .

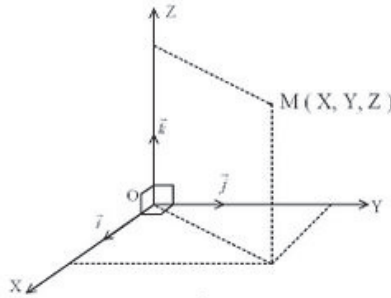


Figure 1.6: Point dans \mathbb{R}^3

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 s'interprètent de la même manière que ceux de \mathbb{R}^2 ; ils s'identifient aux tableaux $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ou aux points (x, y, z) .

1.1.3 Vecteurs de \mathbb{R}^n

Pour un entier $n \geq 1$, \mathbb{R}^n (lire "r-n") désigne l'ensemble de tous les n -triplets (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Un point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n est spécifié par ses coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n .

L'interprétation géométrique des vecteurs comme un segment orienté a un sens seulement dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 . Dans tout ce qui suit, un vecteur de \mathbb{R}^n désignera une liste ordonnée (ou n -uplets) de n réels, que l'on écrit en général sous forme d'un tableau de n lignes et une colonne:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ ou tout simplement } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

On appelle *vecteur nul* de \mathbb{R}^n et noté 0 (ou $\vec{0}$), le vecteur de \mathbb{R}^n dont tous les éléments sont nuls.

Soient $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n :

Egalité de deux vecteurs

Les vecteurs u et v sont égaux si leurs composantes sont identiques:

$$u = v \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ \vdots \\ u_n = v_n \end{cases}$$

Somme de deux vecteurs

$u + v$ est le vecteur dont les composantes sont la somme des composantes de u et de v :

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}.$$

Produit d'un vecteur par un scalaire

Pour tout réel k on a

$$ku = \begin{bmatrix} ku_1 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix}.$$

Opposé

L'opposé du vecteur u est le vecteur noté $-u$ dont les composantes sont les opposés des composantes du vecteur u .

$$-u = \begin{bmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{bmatrix}$$

Exemple 1.1.3. Calculer $u - 3v$, pour $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution. On a

$$u - 3v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.1.4. Soient $A(1, 0, -2)$ un point et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ un vecteur de l'espace. Déterminer les coordonnées du point B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Solution. En notant $B = (x, y, z)$, on a

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} \iff \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x-1=1 \\ y=-2 \\ z+2=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

Donc $B = (2, -2, 1)$.

Propriétés algébrique de \mathbb{R}^n

Quelques soient les vecteurs u, v et w de \mathbb{R}^n ainsi que les scalaires c et d :

- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $u + 0 = 0 + u = u$
- $u + (-u) = -u + u = 0$ où $-u$ désigne $(-1)u$
- $c(u + v) = cu + cv$
- $(c + d)u = cu + du$
- $c(du) = (cd)u$
- $1u = u$.

Definition 1.1.5 (Combinaisons linéaires). *Étant donné des vecteur v_1, v_2, \dots, v_p de \mathbb{R}^n et des scalaires c_1, c_2, \dots, c_p , le vecteur w défini par*

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p$$

*est appelé **combinaison linéaire** de v_1, v_2, \dots, v_p , les scalaire c_1, c_2, \dots, c_p sont appelés **coefficients de la combinaison linéaire**.*

*L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, \dots, v_p de \mathbb{R}^n est noté $\text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ et appelé **partie de \mathbb{R}^n engendrée par les vecteurs v_1, v_2, \dots, v_p** .*

Exemple 1.1.6. Le vecteur $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ et $a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, car

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.1.7. Dans \mathbb{R}^3 , pour tout vecteur non nul v , $Vect\{v\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs collinéaires à v , qui n'est autre que la droite passant par l'origine et de vecteur directeur v .

De même, si u et v sont deux vecteurs non nuls et non colinéaire de \mathbb{R}^3 , $Vect\{u, v\}$ est le plan de \mathbb{R}^3 contenant les vecteurs u , v et 0 . En particulier, $Vect\{u, v\}$ contient $Vect\{u\}$ et $Vect\{v\}$.

1.2 Produits scalaires, longueur et orthogonalité dans \mathbb{R}^n

1.2.1 Produit scalaire et longueur

Definition 1.2.1. Soient $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle produit scalaire de u et v , le scalaire noté $u \cdot v$ et défini par

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Exemple 1.2.2. Pour $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, on a

$$u \cdot v = 2(3) + (-5)2 + (-1)(-3) = -1.$$

Théorème 1.2.3. Soient u , v et w trois vecteur de \mathbb{R}^n et c un scalaire. Alors

- a. $u \cdot v = v \cdot u$
- b. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- c. $(cu) \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv)$
- d. $u \cdot u \geq 0$ et $u \cdot u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Definition 1.2.4. Soit $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^n . On appelle longueur (ou norme) de v , le scalaire positif ou nul noté $\|v\|$ défini par

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Si $\|v\| = 1$ on dit que v est un vecteur unitaire.

Definition 1.2.5. Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle distance de u et v , et on note $dist(u, v)$, la longueur du vecteur $u - v$, c'est-à-dire

$$dist(u, v) = \|u - v\|.$$

Théorème 1.2.6. Si u et v sont des vecteurs de \mathbb{R}^n et c un scalaire, alors:

- (a) $\|cv\| = |c|\|v\|$
- (b) $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwartz)
- (c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (Inégalité triangulaire)

Proof:

a) On a

$$\|cv\|^2 = (cv) \cdot (cv) = c^2 c \cdot v = (c\|v\|)^2,$$

d'où

$$\|cv\| = |c|\|v\|,$$

car $\|cv\| \geq 0$.

b) Cette inégalité découle du fait que le polynôme du second degré

$$Q(t) = \|tu + v\|^2 = \|u\|^2 t^2 + 2tu \cdot v + \|v\|^2$$

est à discriminant positif.

c) On obtient (c) en substituant l'inégalité (b) à l'identité $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$. ■

Exemple 1.2.7. Trouver un vecteur unitaire dans la direction de v dans \mathbb{R}^n .

Solution. Si $v \neq 0$, alors $u = \frac{1}{\|v\|}v$ ou $u = -\frac{1}{\|v\|}v$ convient, car, d'après le théorème précédent nous avons

$$\left\| \pm \frac{1}{\|v\|}v \right\| = \left| \pm \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

Definition 1.2.8. (Angle entre deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3) Soit u et v sont deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Alors, l'angle entre les vecteurs u et v est le réel θ tel que

$$(i) \quad u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta$$

$$(ii) \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Exemple 1.2.9. On considère le triangle de sommets $A(3, -1, 2)$, $B(5, -2, 5)$ et $C(2, 0, 3)$ de l'espace. Déterminer les angles en A et en B . Que peut on dire de ce triangle?

Solution. On a $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-3, 2, -2)$. Alors,

a) L'angle en A du triangle ABC doit satisfaire

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{2(-1) + (-1)(1) + 3(1)}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = 0,$$

par conséquent c'est un angle droit.

b) L'angle en B du triangle ABC doit satisfaire

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{AB \cdot BC} = \frac{(-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}}{AB \cdot BC} = \frac{-2(-3) + (1)(2) + (-3)(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{238}},$$

donc $\widehat{ABC} = \cos^{-1}(14/\sqrt{238}) \simeq 24,84^\circ$.

Le triangle ABC est rectangle en A .

1.2.2 Vecteurs orthogonaux et projections orthogonal sur une droite

Definition 1.2.10. Deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^n sont orthogonaux (entre eux) si $u \cdot v = 0$.

Exemple 1.2.11. Trouver le scalaire a tel que les vecteurs $\vec{u} = (-1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (a, 1, 1)$ soient orthogonaux.

Solution. On a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff (-1)a + 2(1) + 0(1) = 0 \iff a = 2.$$

Donc \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $a = 2$.

Theorem 1.2.12. (Théorème de Pythagore) Deux vecteurs de \mathbb{R}^n sont orthogonaux si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Théorème 1.2.13. Soit u un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Alors tout vecteur v de \mathbb{R}^n peut s'écrire de façon unique

$$v = \widehat{v} + z, \quad (1.2.1)$$

où $\widehat{v} = ku$ pour un certain scalaire k et z est un vecteur orthogonal à u . Le vecteur \widehat{v} est appelé projection orthogonal de v sur u (ou sur la droite $D = Vect\{u\}$), noté $proj_u(v)$, et satisfait

$$proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u. \quad (1.2.2)$$

Exemple 1.2.14. Soient $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Écrire v sous la forme $v = v_1 + v_2$, où v_1 est parallèle à u et v_2 orthogonal à u .

Solution. D'après le Théorème 1.2.13, v_1 est le projeté orthogonal de v sur u ; donc

$$v_1 = proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u = -\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/18 \\ -1/18 \end{bmatrix};$$

et

$$v_2 = v - v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/18 \\ -1/18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/9 \\ 35/18 \\ -53/18 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que

$$u \cdot v_2 = 4(11/9) + (-1)(35/18) + 1(-53/18) = 0.$$

Exemple 1.2.15. On considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(1, 0, -2)$ de \mathbb{R}^3 . Déterminer les coordonnées du point H , pied de la hauteur issue de A .

Solution. D'après l'hypothèse, \overrightarrow{BH} est le projeté orthogonal de \overrightarrow{BA} sur \overrightarrow{BC} . Alors,

$$\overrightarrow{BH} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BC} = \frac{4}{13} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Donc, si $H = (h_1, h_2, h_3)$ nous avons

$$\begin{bmatrix} h_1 - 1 \\ h_2 - 2 \\ h_3 - 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{13} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 2 - 8/13 = 18/13 \\ h_3 = 1 - 12/13 = 1/13 \end{cases}$$

Donc $H = (1, 18/13, 1/13)$.

1.3 Produit vectoriel et applications

Les notions abordées dans cette section concernent uniquement l'espace \mathbb{R}^3 .

1.3.1 Produit vectoriel

Definition 1.3.1. Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On appelle produit vectoriel de u et v , le vecteur noté $u \times v$ défini par

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_2v_3 - v_2u_3, -(u_1v_3 - v_1u_3), u_1v_2 - v_1u_2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Exemple 1.3.2. Si $u = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, on a

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1, 13, 9);$$

soit

$$u \times v = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Théorème 1.3.3. (Propriétés du produit scalaire) Soient u, v et w trois vecteurs de \mathbb{R}^3 et c un scalaire. Alors,

- (a) $u \times v = -v \times u$
- (b) $(u \times v) \cdot v = (u \times v) \cdot u = 0$
- (c) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$
- (d) $(cu) \times v = u \times (cv) = c(u \times v)$
- (e) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs u et v .

Remarque 1.3.4. 1. L'identité (b) implique que $u \times v$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs u et v .

2. L'identité (e) implique que la surface du parallélogramme de coté $\|u\|$ et $\|v\|$ est $\|u \times v\|$.

Exemple 1.3.5. Trouver l'aire du triangle de sommets $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 0, 0)$ et $C(0, 2, 1)$.

Solution. L'aire du triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme de coté $\vec{AB} = (-2, 1, -1)$ et $\vec{AC} = (-1, 3, 0)$. On a

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3, 1, -5).$$

Donc l'aire du triangle ABC est

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (-5)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Théorème 1.3.6. (Volume d'un parallépipède) Le volume d'un parallépipède de coté \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} dans \mathbb{R}^3 est

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Exemple 1.3.7. Calculer le volume du parallépipède de cotés $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$

et $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Solution. On a

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-14, -2, 5),$$

d'où

$$(u \times v) \times w = |(-14, -2, 5) \cdot (2, -1, 6)| = 4$$

1.4 Droites et plans dans \mathbb{R}^3

1.4.1 Droites dans \mathbb{R}^3

Définitions et propriétés

Soient A un point de \mathbb{R}^3 et $\vec{u} = (a, b, c)$ un vecteur non nul de cet espace. Alors, la droite \mathcal{D} passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des point $M(x, y, z)$ de l'espace tels que les vecteurs \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires; c'est-à-dire

$$\vec{AM} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4.1)$$

L'équation (1.4.1) est équivalente à

$$\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4.2)$$

(1.4.2) est appelé équation paramétrique vectorielle de la droite \mathcal{D} . L'équation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.4.3)$$

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont dites parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires; elles sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Remarque 1.4.1.

- a) Deux droites de l'espace sont parallèles, sécantes ou non sécantes. Dans les deux premiers cas on dit que les deux droites sont coplanaires (elles appartiennent à un même plan).
- b) Deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement sécantes.

Distance d'un point à une droite

La distance entre un point M à une droite \mathcal{D} , notée $dist(M, \mathcal{D})$ ou $dist(M, \vec{d})$, si \vec{d} est un vecteur directeur de \mathcal{D} , est la plus courte distance entre M et un point de \mathcal{D} . Si H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} (c'est l'intersection de la droite \mathcal{D} et sa perpendiculaire passant par M), alors $dist(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{MH}\|$. Soit A un point de \mathcal{D} ; alors

$$dist(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{HM}\| = \frac{\|\overrightarrow{AM} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Exemple 1.4.2. Déterminer l'équation vectorielle et paramétrique de la droite \mathcal{D} passant par le point $A(3, -1, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (1, 1, 2)$. Que peut-on dire de la position de la droite \mathcal{D} par rapport aux droites suivantes:

- a) La droite $\mathcal{D}_1 = \{(3 + 2t, -1 + 2t, 4t) | t \in \mathbb{R}\}$
- b) La droite $\mathcal{D}_2 = \{(3 + t, -1 + t, 3 - t) | t \in \mathbb{R}\}$
- c) La droite $\mathcal{D}_3 = \{(7 + 3t, -1 + t, 4) | t \in \mathbb{R}\}$.

Solution. L'équation vectorielle de la droite \mathcal{D} est

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

son équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- a) Le vecteur directeur $\vec{v}_1 = (2, 2, 4)$ de la droite \mathcal{D}_1 est colinéaire à celui de la droite \mathcal{D} , $\vec{v}_1 = 2\vec{v}$. De plus, le point A de la droite \mathcal{D} n'appartient pas à la droite \mathcal{D}_1 , car il n'existe pas un scalaire t tel que $(3, -1, 3) = (3 + 2t, -1 + 2t, 4t)$. Par conséquent, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}_1 sont parallèles et non confondues.
- b) Le vecteur directeur $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$ de la droite \mathcal{D}_2 est orthogonal à celui de la droite \mathcal{D} , car

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v} = 1(1) + 1(1) + (-1) \times 2 = 0.$$

Par conséquent, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}_2 sont orthogonales. D'autre part, puisque les deux droites ont un point commun, le point $A = (3, -1, 3)$, elles sont perpendiculaires.

- c) Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}_3 sont ni colinéaires ni orthogonales, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires ni orthogonaux. Pour évaluer si ces deux droites sont sécantes on résout le système suivant

$$\begin{cases} 7 + 3t_1 = 3 + t_2 \\ -1 + t_1 = -1 + t_2 \\ 4 = 3 + 2t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t_1 = -4 + t_2 \\ t_1 = t_2 \\ -2t_2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_2 = -2 \\ t_2 = 1/2; \end{cases}$$

qui n'a pas de solution. Donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}_3 ne sont pas coplanaires.

Exemple 1.4.3. Soient $A(1, 1, 2)$, $B(-5, 0, 3)$ et $P(1, 0, 0)$ trois points de l'espace \mathbb{R}^3 . Déterminer une équation paramétrique de la droite \mathcal{D} passant par les points A et B et en déduire la distance du point P par rapport à cette droite.

Solution. Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est $\vec{AB} = (-6, -1, 1)$; d'où l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La distance de P à la droite \mathcal{D} est donc

$$\text{dist}(P, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|}.$$

avec,

$$\vec{AP} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-3, 12, -6).$$

D'où

$$\text{dist}(P, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (12)^2 + (-6)^2}}{\sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{38}} = 3\sqrt{21/38}.$$

1.4.2 Plan dans l'espace

Définitions et propriétés

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Alors, le plan (\mathcal{P}) passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace pour lesquels il existe deux scalaires s et t tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}. \quad (1.4.4)$$

L'équation (1.4.4) est équivalente à

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.4.5)$$

(1.4.5) est appelé *équation paramétrique vectorielle du plan* (\mathcal{P}). L'*équation paramétrique* est

$$\begin{cases} x = x_A + su_1 + tv_1 \\ y = y_A + su_2 + tv_2 \\ z = z_A + su_3 + tv_3 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (1.4.6)$$

Un vecteur \vec{n} est dit normal au plan (\mathcal{P}) s'il est orthogonal aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} (c'est le cas du vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$).

Equation normale (cartésienne) du plan (\mathcal{P})

Si $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal du plan (\mathcal{P}), alors l'identité (1.4.6) implique que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. D'où l'équation suivante

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \quad (1.4.7)$$

appelée *équation cartésienne (normale) du plan* (\mathcal{P}).

Definition 1.4.4. *a. Une droite \mathcal{D} est parallèle à un plan (\mathcal{P}) si elle est parallèle à une droite du plan (\mathcal{P}) (dans ce cas, le vecteur normal du plan est orthogonal au vecteur directeur de la droite).*

b. Une droite \mathcal{D} est perpendiculaire à un plan (\mathcal{P}) si son vecteur directeur est normal à au plan (\mathcal{P}).

c. Deux plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') sont dits parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

d. Deux plans (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') sont dits orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Remarque 1.4.5.

- Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.
- L'intersection d'une droite et un plan est un point, la droite elle-même ou un ensemble vide.
- L'intersection de deux plans est l'un des plans (on dit que les plans sont confondus), une droite ou un ensemble vide.

Distance entre un point et un plan

La distance entre un point M et un plan \mathcal{P} , notée $dist(M, \mathcal{P})$, est la plus courte distance entre M et un point de \mathcal{P} . Si H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} (c'est le point H du plan \mathcal{P} tel que ce plan et la droite (HP) soient perpendiculaires), alors $dist(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\|$. Si A est un point quelconque du plan et \vec{n} un vecteur normal au plan, alors

$$dist(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{HM}\| = \|\text{proj}_{\vec{n}}(\overrightarrow{AM})\| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Exemple 1.4.6.

- Trouver l'équation paramétrique vectorielle et l'équation paramétrique du plan \mathcal{P} passant par le point $D(3, -2, 5)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (0, 1, -2)$ et $\vec{v} = (3, -1, 1)$.
- En déduire une équation cartésienne de \mathcal{P} .

Solution.

- L'équation paramétrique vectorielle du plan \mathcal{P} est de la forme

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R};$$

d'où

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

On déduit l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + s - t \\ z = 5 - 2s + t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

- Un vecteur normal du plan \mathcal{P} est $\vec{u} \times \vec{v}$, avec

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -6, -3).$$

Par conséquent, une équation cartésienne de \mathcal{P} est de la forme

$$-x - 6y - 3z + c = 0,$$

et puisque le plan passe par le point $D(3, -2, 5)$ on doit avoir

$$-(3) - 6(-2) - 3(5) + c = 0 \iff c = 6.$$

Finalement, l'équation cartésienne du plan est

$$x + 6y + 3z - 6 = 0.$$

Exemple 1.4.7. Trouver l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} parallèle à l'axe des z et contenant la droite $\mathcal{D} = \{(1+t, -t, 3+2t) | t \in \mathbb{R}\}$. Le plan \mathcal{P} contient-il l'axe des z ?

Solution. Les vecteurs directeurs $\vec{k} = (0, 0, 1)$ de l'axe des z et $\vec{v} = (1, -1, 2)$ de la droite \mathcal{D} sont deux vecteurs non colinéaires du plan et ce plan contient le point $A(1, 0, 3)$ de la droite \mathcal{D} . Par conséquent, il s'agit du plan passant par le point $A(1, 0, 3)$ et de vecteurs normal $\vec{k} \times \vec{v} = (1, 1, 0)$. Son équation cartésienne est de la forme

$$x + y + 0z + c = 0,$$

avec

$$(1) + (0) + 0(3) + c = 0 \iff c = -1.$$

On déduit donc l'équation cartésienne

$$x + y = 1.$$

Le plan \mathcal{P} ne contient pas l'axe des z , car il n'admet pas les points $(0, 0, c)$ pour tout scalaire c (il n'existe pas un plan contenant l'axe des z et la droite \mathcal{D} , ces droites ne sont pas coplanaires).

Exemple 1.4.8. Déterminer la distance du point $Q(1, -1, 2)$ par rapport au plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $7x + 3y - z = 19$.

Solution. Le plan \mathcal{P} passe par le point $A(2, 2, 1)$ et $\vec{n} = (7, 3, -1)$ est son normal. Par conséquent

$$\text{dist}(Q, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-1, -3, 1) \cdot (7, 3, -1)|}{\sqrt{(7)^2 + (3)^2 + (-1)^2}} = \frac{17\sqrt{59}}{59}.$$

Exemple 1.4.9. On considère le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $3x - 5y + z = 10$. Trouver l'intersection du plan \mathcal{P} respectivement par rapport à la droite $\mathcal{D} = \{(1+t, 1-t, 3+t) | t \in \mathbb{R}\}$ et le plan \mathcal{P}' d'équation cartésienne $x + y - z = 0$.

Solution.

- a) La droite \mathcal{D} n'est pas parallèle au plan \mathcal{P} , car son vecteur directeur $\vec{d} = (1, -1, 1)$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\vec{n} = (3, -5, 1)$ de ce plan. Par conséquent, l'intersection est un point $M = (1+t, 1-t, 3+t)$, avec $3(1+t) - 5(1-t) + (3+t) = 10$; soit $M(2, 0, 4)$.
- b) Les deux plans ne sont pas parallèles, car leurs vecteurs normaux $\vec{n} = (3, -5, 1)$ et $\vec{n}' = (1, 1, -1)$ ne sont pas parallèles; par conséquent leur intersection est une droite. Pour déterminer l'équation de cette droite on doit résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 10 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Nous réservons la résolution de tels systèmes au chapitre suivant.