EXAMEN DE MI-SESSION (3 NOVEMBRE 2015)
CALCUL DIFFÉRENTIEL DE PLUSIEURS VARIABLES (MAT 2522)

Nom : SOLUTIONS **Professeur:** Damien Roy

Prénom : ______ Durée du test: 80 minutes

Les calculatrices et les notes de cours ne sont pas autorisées.

Les téléphones cellulaires, note de cours, et dispositifs électroniques non autorisés doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées et entraîner la note de zéro pour l'examen. En apposant votre signature ci-dessous, vous vous engagez à respecter ces consignes.

Signature: ______

1. Question à réponses brèves.

(i) Compléter la phrase suivante: si $\mathbf{f}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, si $\mathbf{g}\colon E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert E de $\mathbb{R}^m$, et si $\mathbf{f}(D) \subseteq E$, alors la composée $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^p$ est différentiable et, pour tout $\mathbf{a} \in D$, on a

$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{a}))\cdot\vec{f}'(\vec{a})$

(ii) Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, et soit $r > 0$. Comment définit-on $\|\mathbf{a}\|_\infty$ et $B_\infty(\mathbf{a}, r)$?

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$$
$$B_\infty(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}-\vec{a}\|_\infty \leqslant r\}$$

(iii) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer une constante c (la plus petite possible) telle que $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq c\|\mathbf{x}\|_\infty$ pour tout vecteur colonne $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ dans $\mathbb{R}^2$. Pouvez-vous donner un point $\mathbf{x}$ non nul pour lequel on a l'égalité?

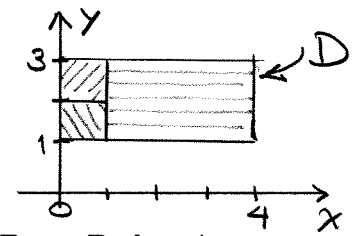
$$\left\|A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ -x_1+4x_2 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|x_1+2x_2|, |-x_1+4x_2|\}$$
$$\leqslant \max\{|x_1|+2|x_2|, |x_1|+4|x_2|\} \leqslant 5\,\|(x_1,x_2)\|_\infty \Rightarrow \boxed{c=5}$$

Pour $\vec{x} = (-1,1)^t$, on a $\|A\vec{x}\|_\infty = \|(1,5)\|_\infty = 5 = 5\,\|\vec{x}\|_\infty$.

(iv) Soit D le rectangle $[0,4] \times [1,3]$ dans $\mathbb{R}^2$. Donner une partition $\mathcal{E}$ de D en rectangles, qui inclut le rectangle $[0,1] \times [1,2]$. Quelle est la maille de votre partition (pour la norme $\| \|_\infty$)?

$$\mathcal{E} = \{ [0,1]\times[1,2], [0,1]\times[2,3], [1,4]\times[1,3] \}$$ par exemple

$$\delta(\mathcal{E}) = \max\{1,1,3\} = 3$$



2. Montrez, à partir de la définition, que la fonction $f\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ est continue au point $(1,2)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $(x,y) \in B_\infty((1,2),\delta)$ avec $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$, on a:

$$\max\{|x-1|, |y-2|\} \leqslant \delta \Rightarrow x \geqslant 1-\delta \geqslant \tfrac{1}{2} \Rightarrow (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

et

$$|f(x,y) - f(1,2)| = \left|\frac{y}{x} - \frac{2}{1}\right| = \frac{|y-2x|}{|x|} \leqslant \frac{|y-2x|}{1/2} = 2|y-2x|.$$

De plus,

$$|y-2x| = |(y-2)-2(x-1)| \leqslant |y-2| + 2|x-1| \leqslant 3\delta,$$

donc

$$|f(x,y)-f(1,2)| \leqslant 6\delta.$$

On choisit $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\}$. Alors

$$\|(x,y)-(1,2)\|_\infty \leqslant \delta \Rightarrow (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

$$\text{et } |f(x,y)-f(1,2)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc f est continue au point $(1,2)$.

3. Supposons qu'une quantité z soit une fonction $z = f(x,y)$ de classe C^2 de x et de y. Le changement de variables $x = rs$ et $y = r + s$ permet de considérer z comme une fonction $z = g(r,s)$ de r et s.

(i) Quelle est la fonction g ?

$$g(r,s) = f(rs, r+s)$$

(ii) Exprimez $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ en termes des dérivées partielles de z par rapport à x et y.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = s\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= s\left(s\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) + \left(s\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

car $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ en vertu du théorème de Clairault.

(ii) Sachant qu'au point $(x,y) = (2,3)$, on a

$$z = 3,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

en déduire la valeur de $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ au point où $r = 2$ et $s = 1$.

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right|_{r=2,\,s=1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1 + 8 - 2 = 7$$

4. Soit $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, soit $(a,b) \in U$, soit $r > 0$ tel que $B_\infty((a,b),r) \subset U$, et soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ avec $\|(h,k)\|_\infty < r$.

(i) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrez que

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

pour des nombres $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$.

Preuve. Posons

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= \big(f(a+h,b+k) - f(a,b+k)\big) - \big(f(a+h,b) - f(a,b)\big)\\ &= g(b+k) - g(b)\end{aligned}$$

où $g(t) = f(a+h,t) - f(a,t)$ est différentiable sur $(b-r, b+r)$.
Comme $|k| < r$, le théorème des accroissements finis donne

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= k\, g'(b+\theta_2 k) \quad \text{avec } \theta_2 \in (0,1)\\ &= k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h, b+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)\right).\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, b+\theta_2 k)$ est différentiable sur $(a-r, a+r)$ et que $|h| < r$, le même théorème donne

$$\Delta^2 f = kh \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, b+\theta_2 k)\right)\right|_{x = a+\theta_1 h} = hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

avec $\theta_1 \in (0,1)$.

(ii) Utilisez cette formule pour estimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)$ sachant que

$f(1,2) = 3$, $f(1.01,2) = 3.0112$, $f(1,2.02) = 3.0331$ et $f(1.01,2.02) = 3.0455$.

Solution. Ici $a=1$, $b=2$, $h=0.01$ et $k=0.02$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) &\cong \frac{1}{0.01} \times \frac{1}{0.02} \times \big(f(1.01,2.02) - f(1.01,2) - f(1,2.02) + f(1,2)\big)\\ &= 5000 \times (3.0455 - 3.0112 - 3.0331 + 3)\\ &= 5000 \times (6.0455 - 6.0443)\\ &= 5000 \times 0.0012 = 5 \times 1.2 = \boxed{6}\end{aligned}$$

5. Déterminez l'approximation de Taylor de degré deux de la fonction $f(x,y) = ye^{x+y}$ au point $(x,y) = (1,-1)$, puis utilisez-la pour estimer à la main $f(1.1,-0.9)$. Est-ce que $(1,-1)$ est un point critique de f?

Solution $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y} + ye^{x+y} = (y+1)e^{x+y}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(1,-1) = (-e^0, 0) = (-1, 0).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (y+1)e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x+y} + (y+1)e^{x+y} = (y+2)e^{x+y}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'approximation de Taylor de degré 2 de f au point $(1,-1)$ est donc

$$Q(x,y) = f(1,-1) + \vec{\nabla} f(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y+1)\nabla^2 f(1,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 + (-1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y+1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2$$

$$\Rightarrow f(1.1,-0.9) \cong Q(1.1,-0.9) = -1 - 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{2}(0.1)^2$$
$$\cong -1.1$$

Comme $\vec{\nabla} f(1,-1) \neq (0,0)$, le point $(1,-1)$ n'est pas un point critique de f.

6. On considère la fonction $f(x,y) = x^4 + y^4$.

(i) Déterminer tous ses points critiques dans $\mathbb{R}^2$.

(ii) En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, déterminez le maximum et le minimum de $f(x,y)$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 2$.

(iii) A l'aide de (i) et de (ii), en déduire le maximum et le minimum de $f(x,y)$ sur le disque $x^2 + y^2 \leq 2$.

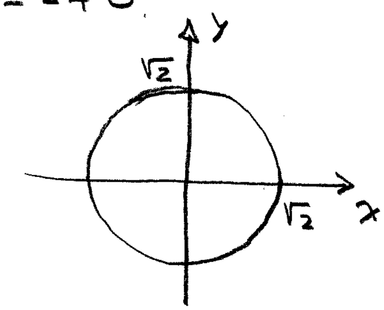
(i) $\vec{\nabla} f(x,y) = (4x^3, 4y^3)$

Donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow 4x^3 = 4y^3 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Le seul point critique de f est $(0,0)$.

(ii) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que le cercle $x^2+y^2=2$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, f atteint son minimum et son maximum sur le cercle. Posons $g(x,y) = x^2+y^2$. En un extrémum local (x,y) de f sur le cercle $g(x,y)=2$, on a

$$\vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y) \neq \vec{0} \text{ car } x^2+y^2 = 2 \neq 0$$



$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = \lambda 2x \\ 4y^3 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

Si $x=0$, on a $y = \pm\sqrt{2}$. Si $y=0$, on a $x = \pm\sqrt{2}$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on trouve $\lambda = 2x^2 = 2y^2 \Rightarrow |x| = |y| = 1$. Cela fait 8 points :

$(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$.

$\Rightarrow$ Le maximum de f est 4 atteint en $(0, \pm\sqrt{2})$ et en $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

Son minimum est 2 atteint en $(\pm 1, \pm 1)$.

(iii) On a $f(0,0) = 0$ $\Rightarrow$ Le maximum de f sur le disque est 4 atteint en les points $(0, \pm\sqrt{2})$ et $(\pm\sqrt{2}, 0)$ du bord et son minimum est 0 atteint en $(0,0)$.

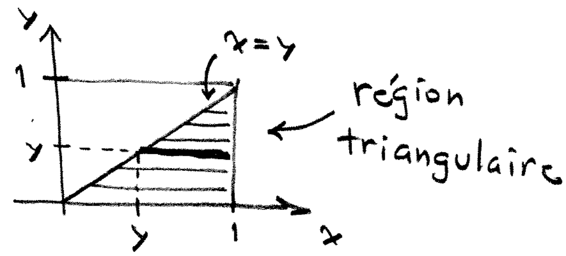
7. Dessinez la région D du plan pour laquelle

$$\int_D e^{x^2}\,dm = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx,$$

puis calculez cette intégrale en changeant d'abord l'ordre d'intégration.

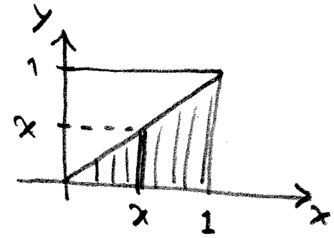
Solution

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$



On peut aussi décrire D par

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases}$$



$$\Rightarrow \int_D e^{x^2}\,dm = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2}\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[e^{x^2} y \right|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1).$$