



Université d'Ottawa • University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1730 C : Devoir 3

À remettre mercredi le 9 mars en classe à 17h30

Professeur : Robert Hart

Nom de famille : _____

Prénom : _____

Signature : _____

- En signant ci-dessus, vous déclarez que le travail remis est original et a été écrit par vous et que vous n'avez pas copié sur quiconque ou de tout autre source.
- SVP agraffer les pages.
- Ce devoir contient **3 questions** sur **10 pages** (incluant la page couverture).
- Toutes vos réponses doivent être accompagnées avec les justifications nécessaires.
- ★ **Indications** : Dans ce devoir, certaines des questions contiennent un k et/ou un p .
 - Ici le k est un coefficient qui est la somme des chiffres de votre numéro étudiant.
Exemple : Si votre numéro d'étudiant est 1230456 alors $k = 1 + 2 + 3 + 0 + 4 + 5 + 6 = 21$.
 - Si vous êtes une **femme** est que k est **impair**, alors $p = 3$.
 - Si vous êtes une **femme** est que k est **pair**, alors $p = 4$.
 - Si vous êtes un **homme** est que k est **impair**, alors $p = -3$.
 - Si vous êtes un **homme** est que k est **pair**, alors $p = -4$.*Exemple* : Je suis un homme et $k = 21$ est impair, donc $p = -3$.
- Vos valeurs pour k ou p sont ;
 $k =$ _____ $p =$ _____
- *Remarque* : Si vos valeurs de k et p sont erronées alors votre devoir sera **refusé!**

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Str. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Question									Total
Points									

1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(kx) - 1}{e^{kx^2} - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(kx) - 1}{e^{kx^2} - 1} = \frac{0}{0}.$$

Avec la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(kx) - 1}{e^{kx^2} - 1} &\stackrel{R.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k \sin(kx)}{2kx e^{kx^2}} \quad (\text{Cas : } 0/0) \\ &\stackrel{R.H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k^2 \cos(kx)}{2e^{kx^2} + 4k^2 x^2 e^{kx^2}} \\ &= \frac{-k^2 \cos(k(0))}{2ke^{k(0)^2} + 4k^2(0)^2 e^{k(0)^2}} \\ &= \frac{-k}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(px)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{0}{0}.$$

Avec la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(px)}{x^2} &\stackrel{R.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p \cos(px)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p \cos(px)}{2x} \quad (\text{Cas : } p/0) \\ &= \frac{p}{2(0^+)} \\ &= \frac{p}{0^+} = \begin{cases} \infty, & \text{si } p \in \{3, 4\} \\ -\infty, & \text{si } p \in \{-4, -3\} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{px}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{px} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{px}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{px \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)} \\ &= e^{pk}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} px \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)}{1/x} \\ &\stackrel{R.H.}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{p}{1 + \frac{k}{x}} \cdot \frac{-k}{x^2}}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{1 + \frac{k}{x}}(k) \\ &= pk. \end{aligned}$$

2. Utiliser les 8 étapes présentées (à la Section 5.3) pour tracer (sur le papier graphique à la page suivante) la fonction

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + 3(p^2 - 4)x + 1 = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Exemple : Si $p = -3$, alors $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 1$.

- 1) Calculer le domaine :

Le domaine de la fonction est

$$\text{dom}(f) =] - \infty, \infty[.$$

- 2) Calculer les limites aux infinis ;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3px^2 + 3(p^2 - 4)x + 1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3px^2 + 3(p^2 - 4)x + 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

- 3) Calculer les limites aux points ouverts du domaine ;

Il y a aucune limite à calculer ici pour cette fonction.

- 4) Calculer la première dérivée et la deuxième dérivée ;

$$f'(x) = 3x^2 - 6px + 3(p^2 - 4) = 3(x - (p - 2))(x - (p + 2))$$

et

$$f''(x) = 6x - 6p = 6(x - p).$$

5) Calculer les points critique de $f(x)$ et $f'(x)$;

Ici $f'(x) = 0$ lorsque $3(x - (p - 2))(x - (p + 2)) = 0$, donc

$$x = p - 2 \text{ et } x = p + 2$$


sont les points critiques de $f(x)$.

Ici $f''(x) = 0$ lorsque $6(x - p) = 0$, donc

$$x = p$$

est le point critique de $f'(x)$.

6) Construire le grand tableau des signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ et interpréter;

x	$] - \infty, p - 2[$	$p - 2$	$]p - 2, p[$	p	$]p, p + 2[$	$p + 2$	$]p + 2, \infty[$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
	\curvearrowright	MAX	\curvearrowleft	P.I.	\curvearrowright	MIN	\curvearrowleft

$f(x)$ croissante : $] - \infty, p - 2[\cup]p + 2, \infty[$.

$f(x)$ décroissante : $]p - 2, p + 2[$.

$f(x)$ concave vers le haut : $]p, \infty[$.

$f(x)$ concave vers le bas : $] - \infty, p[$.

min. loc. : $x = p + 2$.

max. loc. : $x = p - 2$.

points d'inflexion : $x = p$.

7) Calculer l'ordonnée des points importants ;

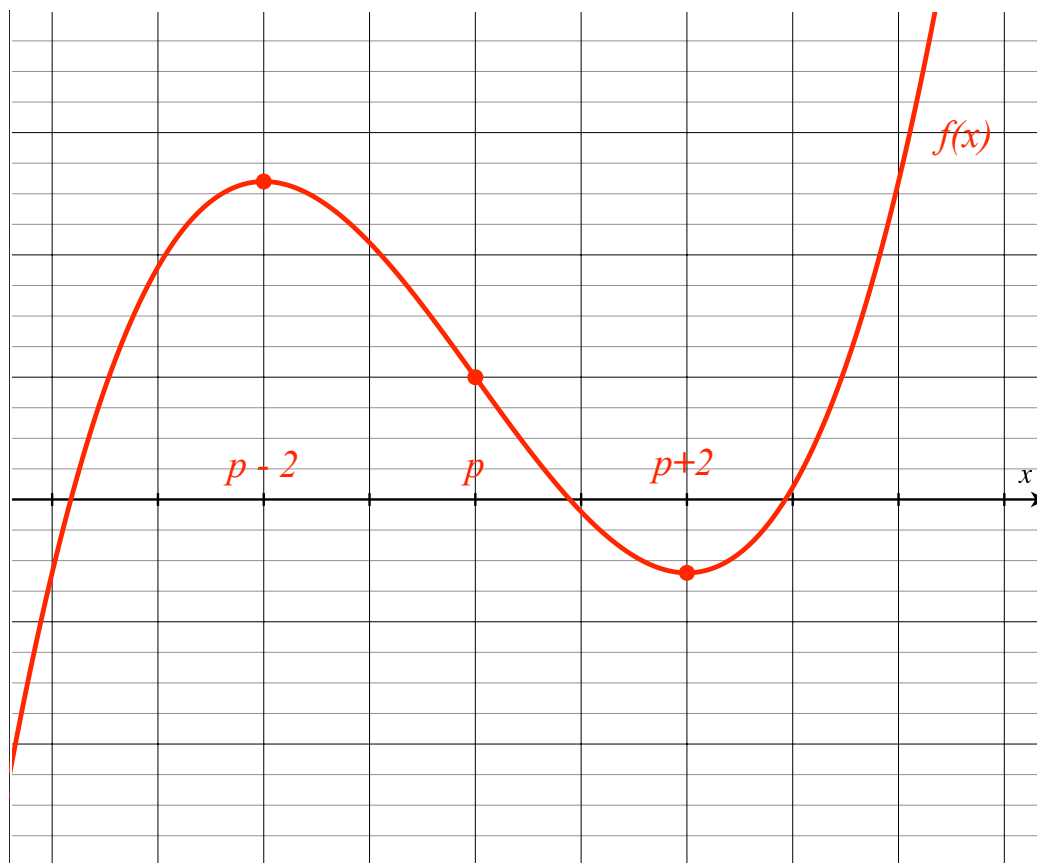
x	-6	-4	-2
$f(x)$ <small>($p=-4$)</small>	1	-15	-31

x	-5	-3	-1
$f(x)$ <small>($p=-3$)</small>	26	10	-6

x	1	3	5
$f(x)$ <small>($p=3$)</small>	8	-8	24

x	2	4	6
$f(x)$ <small>($p=4$)</small>	33	17	1

8) Tracer le graphe de $f(x)$;



3. (AVEC p POSITIF (3 OU 4)) Utiliser les 8 étapes présentées (à la Section 5.3) pour tracer (sur le papier graphique à la page suivante) la fonction

$$f(x) = \frac{px}{x - k} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Exemple : Si $k = 21$ et $p = -3$, alors $f(x) = \frac{-3x}{x-21}$.

- 1) Calculer le domaine :

Division par zéro lorsque $x = k$. Le domaine de la fonction est

$$\text{dom}(f) =] - \infty, k[\cup]k, \infty[.$$

- 2) Calculer les limites aux infinis ;

Nous avons ici deux limites de la forme $\frac{\infty}{\infty}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px}{x - k} &\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote horizontale à l'infini à $y = p$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px}{x - k} &\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p}{1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote horizontale à moins l'infini à $y = p$.

- 3) Calculer les limites aux points ouverts du domaine ;

Nous avons ici deux limites de la forme $\frac{pk}{0}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{px}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{pk}{(k^-) - k} \\ &= \frac{pk}{0^-} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{px}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{pk}{(k^+) - k} \\ &= \frac{pk}{0^+} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote verticale à $x = k$.

4) Calculer la première dérivée et la deuxième dérivée ;

$$f'(x) = \frac{-pk}{(x-k)^2}$$

et


$$f''(x) = \frac{2pk}{(x-k)^3}.$$

5) Calculer les points critique de $f(x)$ et $f'(x)$;

Ici $f'(x) \neq 0$ et $f'(x)$ est non-définie lorsque $x = k$.

Ici $f''(x) \neq 0$ et $f''(x)$ est non-définie lorsque $x = k$.

6) Construire le grand tableau des signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ et interpréter ;

x	$] - \infty, k[$	k	$]k, \infty[$
$f'(x)$	-	n.d.	-
$f''(x)$	-	n.d.	+
	\curvearrowright	A.V.	\curvearrowleft

$f(x)$ décroissante : $] - \infty, k[\cup]k, \infty[$.

$f(x)$ concave vers le haut : $]k, \infty[$.

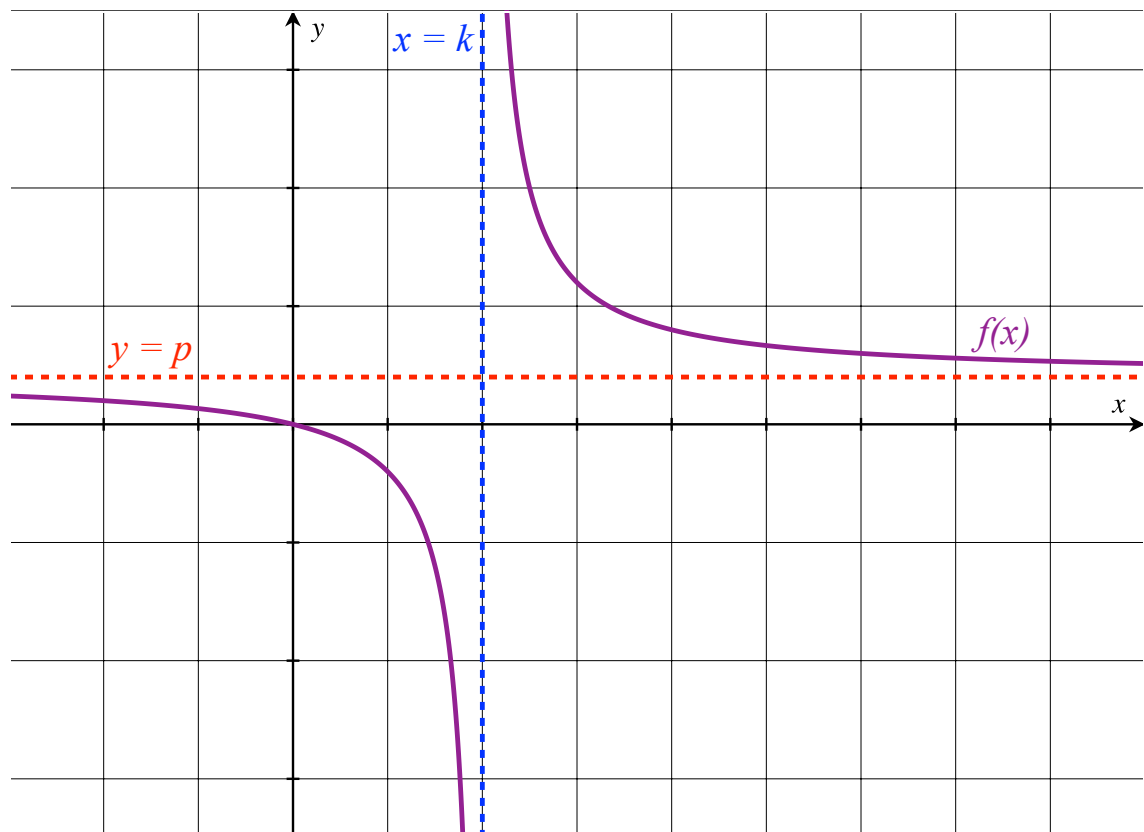
$f(x)$ concave vers le bas : $] - \infty, k[$.

7) Calculer l'ordonnée des points importants;

La fonction possède une racine (numérateur = 0) à $x = 0$.

x	0
$f(x)$	0

8) Tracer le graphe de $f(x)$;



3. (AVEC p NÉGATIF (-3 OU -4)) Utiliser les 8 étapes présentées (à la Section 5.3) pour tracer (sur le papier graphique à la page suivante) la fonction

$$f(x) = \frac{px}{x - k} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Exemple : Si $k = 21$ et $p = -3$, alors $f(x) = \frac{-3x}{x-21}$.

- 1) Calculer le domaine :

Division par zéro lorsque $x = k$. Le domaine de la fonction est

$$\text{dom}(f) =] - \infty, k[\cup]k, \infty[.$$

- 2) Calculer les limites aux infinis ;

Nous avons ici deux limites de la forme $\frac{-\infty}{\infty}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px}{x - k} &\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote horizontale à l'infini à $y = p$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px}{x - k} &\stackrel{RH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p}{1} \\ &= p. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote horizontale à moins l'infini à $y = p$.

- 3) Calculer les limites aux points ouverts du domaine ;

Nous avons ici deux limites de la forme $\frac{pk}{0}$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{px}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{pk}{(k^-) - k} \\ &= \frac{pk}{0^-} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{px}{x - k} &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{pk}{(k^+) - k} \\ &= \frac{pk}{0^+} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons une asymptote verticale à $x = k$.

- 4) Calculer la première dérivée et la deuxième dérivée ;

$$f'(x) = \frac{-pk}{(x-k)^2}$$

et


$$f''(x) = \frac{2pk}{(x-k)^3}.$$

- 5) Calculer les points critique de $f(x)$ et $f'(x)$;

Ici $f'(x) \neq 0$ et $f'(x)$ est non-définie lorsque $x = k$.

Ici $f''(x) \neq 0$ et $f''(x)$ est non-définie lorsque $x = k$.

- 6) Construire le grand tableau des signes de $f'(x)$ et $f''(x)$ et interpréter ;

x	$] - \infty, k[$	k	$]k, \infty[$
$f'(x)$	+	n.d.	+
$f''(x)$	+	n.d.	-
	\nearrow	A.V.	\curvearrowright

$f(x)$ croissante : $] - \infty, k[\cup]k, \infty[$.

$f(x)$ concave vers le haut : $] - \infty, k[$.

$f(x)$ concave vers le bas : $]k, \infty[$.

7) Calculer l'ordonnée des points importants;

La fonction possède une racine (numérateur = 0) à $x = 0$.

x	0
$f(x)$	0

8) Tracer le graphe de $f(x)$;

