MAT1741B - Introduction à l'algèbre linéaire - Hiver 2017

Examen Partiel 3 (Version B) - Mars 6, 2017

Professeur: Maia Fraser

Durée: 75 minutes

Nom complet: Solutions

Nom de famille Prénom

Numéro d'étudiant:

DGD (remplir complètement le cercle qui correspond):

○ (labo 1) 14h30-16h00. ○ (labo 2) 16h00-17h30.
○ (labo 3) 16h00-17h30. ○ (labo 4) 16h00-17h30.

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices ne sont pas permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 28 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

Version B:

1	2	3	4	5
E	E	D	F	A

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

BONNE CHANCE!

Version A:

E E D A F

1. Le rang de la matrice des coefficients d'un système linéaire **non-homogène** $AX = B$ à 4 équations et 5 inconnues est égale à 4. Parmi les énoncés suivants, un seul est vrai. Lequel?

X **A.** Le système $AX = B$ est toujours incompatible. NON

X **B.** Le système $AX = B$ peut être incompatible, mais le système homogène $AX = 0$ est toujours compatible. NON

X **C.** Le système homogène $AX = 0$ a une solution unique (la solution triviale).

X **D.** Si le système $AX = B$ est compatible, alors le nombre de paramètres dans sa solution générale est 5. non, c'est 1

✓ **E.** Le système $AX = B$ est toujours compatible, et le nombre de paramètres dans sa solution générale est 1. OUI

X **F.** Le système $AX = B$ est toujours compatible, et la solution triviale $X = 0$ en est toujours une solution. $X=0$ ne sera pas une solution si $B \neq 0$.

1. # var. libres $= 5-4 = 1$
lignes nulles dans forme échelonnée de A $= 4-4=0$
$\Rightarrow$ toujours compatible.

2. Pour un système linéaire **homogène** à 16 équations et 13 inconnues, répondre aux questions suivantes.

(1) Le système peut-il être incompatible? X
(2) Le système peut-il avoir une infinité de solutions? ✓
(3) Le système peut-il avoir une solution unique? ✓

A. Non, Oui, Non **B.** Non, Non, Non **C.** Oui, Oui, Oui
D. Oui, Oui, Non **E.** Non, Oui, Oui **F.** Non, Non, Oui

2. rang $\leq 16, 13$ Donc # var. libres peut être 0 (si rang $=13$) ou plus (si rang <13)
toujours consistent car homogène.

3. Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + (a-2)x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = b \end{cases}$$

Laquelle des conditions suivantes est équivalente à l'incompatibilité du système?

A. $a = 0$ et $b \neq 1$ **B.** $a = 4$ ou $b = 1$
C. $a \neq 2$ et $b = 1$ **D.** $a = 4$ et $b \neq 1$
E. $a \neq 4$ et $b \neq 1$ **F.** Aucune des autres réponses

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{array}\right) \overset{L_2 - L_1 \to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 4-a & b-1 \end{array}\right)$

Incompatible $\Leftrightarrow$ $4-a = 0$ et $b-1 \neq 1$

4. $\det\begin{bmatrix} 3a-5g & g & d \\ 3b-5h & h & e \\ 3c-5i & i & f \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 3a-5g & 3b-5h & 3c-5i \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$

$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} -\det\begin{bmatrix} 3a-5g & 3b-5h & 3c-5i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \underset{5L_3 + L_1 \to L_1}{=} -\det\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$= -3\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$= -9$

4. Si

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 3,$$

trouver la valeur de

$$\det\begin{bmatrix} 3a-5g & g & d \\ 3b-5h & h & e \\ 3c-5i & i & f \end{bmatrix}.$$

A. -9 **B.** 1 **C.** -1 **D.** 3 **E.** -3 **F.** 9

5. On note A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & (k+2) \\ (k+2) & 8 \end{bmatrix}$$

et on considère le système linéaire homogène avec variables x_1, x_2 donné par $A\vec{x} = \vec{0}$. Pour quelles valeurs de k est-ce que ce système a des solutions non-triviales?

A. -2 ou 6 **B.** $1/2$ **C.** 3
D. $k \neq 2$ **E.** $k \neq 6$ **F.** 2 ou -6

5. Sol. non-triviale $\Leftrightarrow$ rang < 2
$\Leftrightarrow \det A = 0$

$\det A = 16 - (k+2)^2$
$= 16 - k^2 - 4k - 4$
$= 12 - k^2 - 4k = -(k-2)(k+6)$

Donc sol non-triviale $\Leftrightarrow$ $k = 2$ ou -6

//

Sol'n alternative pour 5:

Sol non-triv. $\Leftrightarrow$ rang < 2
$\Leftrightarrow 8 = \frac{(k+2)^2}{2}$
$\Leftrightarrow 16 = (k+2)^2$
$\Leftrightarrow k = 2$ ou -6 comme avant

car

$\begin{pmatrix} 2 & k+2 \\ k+2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & k+2 \\ 0 & 8 - \frac{(k+2)^2}{2} \end{pmatrix}$

par l'opération

$L_2 - \frac{(k+2)}{2}L_1 \to L_2$.

Version A

6. [**6 points**] Considérer la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) Utiliser la méthode de votre choix pour calculer le déterminant de A.

(2) Etant donnée une matrice carrée C de format 2×2 dont le déterminant est 3. En déduire le déterminant de la matrice $B = -3C^2C^TC^{-1}$.

(1)

$$\det A \overset{C_4 - C_1 \to C_4}{=} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -11 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$= (-1)(1) \det \begin{bmatrix} 2 & -11 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)(1)\left[(-1) \det \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= (2)(-2) - (2)(-11)$$

$$= -4 + 22 = 18$$

(2)

$$\det B = \det\left(-3C^2C^TC^{-1}\right)$$

$$= (-3)^2 \det(C^2) \det(C) \frac{1}{\det C}$$

$$= 9 \cdot 9 \cdot \frac{3}{3} = 81$$

6. **[6 points]** Considérer la matrice:

Version B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -11 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) Utiliser la méthode de votre choix pour calculer le déterminant de A.

(2) Etant donnée une matrice carrée C de format 2×2 dont le déterminant est 3. En déduire le déterminant de la matrice $B = -3C^2C^TC^{-1}$.

$C_4 - C_1 \to C_4$

(1) $$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & -11 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)(1) \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)(1)\left[(-1) \det \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= 66 - 8 = 58$$

(2) $$\det B = \det(-3C^2C^TC^{-1})$$

$$= (-3)^2 \det(C^2) \det C \frac{1}{\det C}$$

$$= 9 \cdot 9 \cdot \frac{3}{3} = 81$$

Versions A et B

7. **[6 points]** Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} -x + 3y + (2-a)z = 4-b \\ 3x - 2y + 9z = 10 \\ 2x - 4y + az = b \end{cases}$$

où a et b sont deux nombres réels. (Tip: essayer d'éliminer les a et b de la première ligne pour faciliter les calculs.)

(1) Trouver les valeurs de a et b telles que le système:

i. admet une solution unique

ii. admet une infinité de solutions,

iii. est incompatible.

(2) Dans le cas (ii),

i. donner la solution générale du système,

ii. donner une description géométrique de cette solution.

(2) On a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Soit $z = t \in \mathbb{R}$

Alors $y + 3t = -2 \Rightarrow y = -3t - 2$

et $x - y + 2t = 4$

$\Rightarrow x = y - 2t + 4$

$= -3t - 2 - 2t + 4$

$= -5t + 2$

On a l'ensemble de solutions

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est une droite dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & (2-a) & (4-b) \\ 3 & -2 & 9 & 10 \\ 2 & -4 & a & b \end{array}\right)$$

$L_1 + L_3 \to L_1$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 9 & 10 \\ 2 & -4 & a & b \end{array}\right)$

$L_2 - 3L_1 \to L_2$, $L_3 - 2L_1 \to L_3$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & a-4 & b-8 \end{array}\right)$

$L_3 + 2L_2 \to L_3$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & b-12 \end{array}\right)$

(1) (i) Sol unique si $a \neq -2$ et b arbitraire

(ii) ∞ solutions si $a = -2$ et $b = 12$

(iii) incompatible si $a = -2$ et $b \neq 12$

Version A

8. **[6 points]** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

(1) Si un systéme homogéne est compatible, alors il admet une infinité de solutions.

(2) Si le systéme homogéne $AX = 0$ admet une infinité de solutions, alors chaque forme échelonnée de A a au moins une ligne nulle.

(3) Si le système homogène $AX = 0$ admet une solution non-triviale, alors le système $AX = B$ admet une infinité de solutions pour n'importe quelle colonne B.

(1) Faux $AX=0$ est toujours compatible mais n'a pas toujours une infinité de solutions. Ex) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$AX=0$ correspond à $X=0$, solution unique.

(2) Faux   Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AX=0$ a comme ensemble de solutions

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ mais A n'a pas de ligne nulle

(3) Faux   Il est ~~to~~ encore possible que $AX=B$ soit incompatible. (donc n'a aucune solution). Par exemple pour

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le sys. hom. $AX=0$ a comme solutions

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

mais quand $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, il n'y a pas de solutions pour $AX = B$.

LA FIN.

8. **[6 points]** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse.

(1) Si le systéme homogéne $AX = 0$ admet une infinité de solutions, alors chaque forme échelonnée de A a au moins une ligne nulle.

(2) Si un~~e~~ système homogène admet une solution non-triviale, alors il admet une infinité de solutions.

(3) Si le système homogène $AX = 0$ n'admet que la solution triviale, alors pour n'importe quelle colonne B le système linéaire $AX = B$ admet une solution unique.

(1) Faux   Par exemple $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$AX=0$ a comme solutions

$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$ mais A n'a pas de ligne nulle.

(2) Vrai   Le système homogène a toujours la sol'n nulle comme une solution. Tout sys. d'éq. linéaires n'a que 3 cas : zero solutions, sol. unique, ∞ solution. Alors si $Ax=0$ a aussi une sol. non-trivialee on est forcément dans le 3ème cas.

(3) Faux   Si $AX=0$ n'a que la sol. triviale, alors # inconnues = rang(A) mais A peut avoir une forme échelonnée avec lignes nulles (si # equations > rang(A)). Par ex. $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
Maintenant pour $B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ il n'y a pas de solution à $AX = B$, c'est à dire $AX=B$ est incompatible

Version B

LA FIN.