MAT 2777 (Hiver 2017)

Devoir 6 – solutionnaire
Il y a 4 questions

Veuillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. Soient X, Y, et Z des variables aléatoires normales et indépendantes, où $X \sim N(\mu_X = 1, \sigma_X^2 = 3)$, $Y \sim N(\mu_Y = 0, \sigma_Y^2 = 2)$, et $Z \sim N(\mu_Z = 5, \sigma_Z^2 = 1)$. Soit $W = 3X - 6Y + 2Z$.

[**2**] (a) Déterminer $E[W]$ et $V[W]$.

[**2**] (b) Quelle est la loi de probabilité pour W?

[**2**] (c) Calculer $P(7 < W < 9)$?

solution:

(a)
$$E[W] = 3E[X] - 6E[Y] + 2E[Z] = 3(1) - 6(0) + 2(5) = 13$$

Puisque X, Y et Z sont indépendantes,

$$V[W] = 3^2\,V[X] + (-6)^2\,V[Y] + 2^2\,V[Z] = 3^2(3) + (-6)^2(2) + 2^2(1) = 103$$

(b) Puisque X, Y et Z sont indépendantes et normales, alors W suit une loi normale de moyenne $\mu_X = E[W] = 13$ et de variance $\sigma_W^2 = V[W] = 103$. En d'autres-mots, $W \sim N(\mu_W = 13, \sigma_W^2 = 103)$.

(c)

$$P(7 < W < 9) = \Phi\left(\frac{9-13}{\sqrt{103}}\right) - \Phi\left(\frac{7-13}{\sqrt{103}}\right) = \Phi(-0{,}39) - \Phi(-0{,}59) = 0{,}3483 - 0{,}2776 = 0{,}071$$

2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de taille $n = 60$ d'une population avec la loi de probabilité suivante : Pour chaque i : on a

$$P(X_i = x) = \frac{1}{6}, \quad \text{pour} \;\; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Soit $Y = X_1 + X_2 \ldots + X_n$.

[**2**] (a) Calculer la moyenne de la population μ et la variance de la population σ^2?

[**2**] (b) Calculer $E[Y]$ et $V[Y]$?

[**2**] (c) Quelle est la loi de probabilité approximative de Y?

[**2**] (d) Approximer la probabilité suivante $P(Y > 160)$.

solution: La loi de probabilité commune de ces variables aléatoires est dite la population. Ici, on décrit la population avec une variable aléatoire discrète avec la fonction masse de probabilité $p_X(x) = 1/6$, pour $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(a) La moyenne de la population est

$$\mu = E[X] = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = 0\,(1/6) + 1\,(1/6) + 2\,(1/6) + 3\,(1/6) + 4\,(1/6) + 5\,(1/6) = 2{,}5.$$

La variance de la population est

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V[X] = \left(\sum_{x \in R_X} x^2\, p_X(x) \right) - \mu_X^2 \\ &= [0^2\,(1/6) + 1^2\,(1/6) + 2^2\,(1/6) + 3^2\,(1/6) + 4^2\,(1/6) + 5^2\,(1/6)] - (2{,}5)^2 \\ &= 2{,}9167. \end{aligned}$$

(b)

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{60} E[X_i] = \sum_{i=1}^{60} 2{,}5 = (60)(2{,}5) = 150$$

Puisque $X_1, \ldots X_n$ sont indépendantes, on a

$$V[Y] = \sum_{i=1}^{60} V[X_i] = \sum_{i=1}^{60} 2{,}9167 = 60(2{,}9167) = 175{,}002.$$

(c) Par le théorème central limite, $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n = Y/n$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu_{\bar{X}} = \mu = 2{,}5$ et de variance $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n = 2{,}9167^2/60$, puisque $n = 60$ est grande. Mais, $Y = n\,\overline{X} = 60\,\overline{X}$ est un multiple de $\overline{X}$, alors Y suit aussi approximativement une loi normale aussi. On a $Y \sim N(\mu_Y = 150, \sigma_Y^2 = 175{,}002)$ approximativement.

(d) On veut

$$\begin{aligned} P(Y > 160) &= 1 - P(Y \leq 160) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{160 - 150}{\sqrt{175{,}002}} \right) = 1 - \Phi(0{,}76) = 0{,}2236 \end{aligned}$$

3. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un échantillon aléatoire de taille $n = 100$ d'une population de moyenne μ et de variance **connue** $\sigma^2 = 0{,}5$. On a calcué la moyenne de l'échantillon $\overline{x} = 8{,}3$.

[**2**] (a) Donner un intervalle de confiance à 95% pour μ.

[**2**] (b) Donner un intervalle de confiance unilatéral limité à la droite à 99,9% pour μ.

[**2**] (c) Donner un intervalle de confiance unilatéral limité à la gauche à 90% pour μ.

[**2**] (d) Nous voulons déterminer une taille d'échantillon n pour une autre étude. Déterminer la taille d'échantillon requise n, afin que nous sommes 90% confiant que l'erreur de l'estimation de la moyenne soit inférieure à 0,007.

solution:

(a) Puisque la variance de la population est connue $\sigma^2 = 0{,}5$ et que la taille de l'échantillon est grande ($n \geq 30$), alors un intervalle de confiance à 95% pour μ est

$$\bar{x} \pm z_{0{,}025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8{,}3 \pm z_{0{,}025} \left(\frac{\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{100}} \right) = [8{,}16; 8{,}44],$$

où $z_{0{,}025} = t_{0{,}025;\infty} = 1{,}96$.

(b) Calculons $\bar{x} + z_{0{,}001}\sigma/\sqrt{n} = 8{,}518$, où $z_{0{,}001} = 3{,}090$. Alors, on est 99,9% confiant que $\mu < 8{,}518$.

(c) Calculons $\bar{x} - z_{0{,}1}\sigma/\sqrt{n} = 8{,}209$, où $z_{0{,}1} = 1{,}282$. Alors, on est 90% confiant que $\mu > 8{,}209$.

(d) On veut une taille d'échantillon n tel que

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{0{,}5}}{0{,}007}\right)^2 = 27\,612{,}5$$

où $z_{0{,}05} = 1{,}645$. $\alpha = 0.1$, so $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$. Alors, on va prendre $n = 27\,613$ observations.

4. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un échantillon aléatoire de taille $n = 10$ d'une population de moyenne μ et de variance σ^2. On a calculé la moyenne de l'échantillon $\overline{x} = -6$ et la variance de l'échantillon $s^2 = 0{,}3$. Donner un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne de la population μ.

solution: Puisque la population est normale, un intervalle de confiance à 95% pour μ est

$$\bar{x} \pm t_{0{,}025;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} = -6 \pm t_{0{,}025;9}\frac{\sqrt{0{,}3}}{\sqrt{10}} = [-6{,}39; -5{,}61],$$

où $t_{0{,}025;9} = 2{,}262$.

[/**22**]