**MAT 2777 (Hiver 2017)**

**Devoir 5 - solutionnaire**
*Il y a 5 questions*

Veuillez résoudre les problèmes suivants en utilisant une calculatrice autorisée par la Faculté des Sciences (TI30, TI34, Casio fx-260 et Casio fx-300) :

1. Soit $X$ la durée de vie (en mois) d'un transistor. On a $5 = E[X] = 1/\lambda$, alors $\lambda = 1/5$.
   (a) On veut $P(X > 7) = e^{-\lambda(7)} = 0{,}2466$.
   (b) On veut
   $$P(3 < X < 8) = F_X(8) - F_X(3) = (1 - e^{-\lambda(8)}) - (1 - e^{-\lambda(3)}) = 0{,}3469.$$
   (c) On veut
   $$\begin{aligned} P(X > 7 | X > 4) &= P(X > 3) \quad \text{(par l'absence de mémoire)} \\ &= e^{-\lambda(3)} = 0{,}5488. \end{aligned}$$

**[2]** 2. (a) $X$ suit une loi exponentielle de taux $\lambda = 0{,}2$. Sa moyenne est $E[X] = 1/\lambda = 5$ appels et sa variance est $V[X] = 1/\lambda^2 = 25$ appels$^2$.

**[2]** (b) On veut $P(X < 1) = 1 - e^{-\lambda(1)} = 0{,}1813$.

**[2]** (c) Le temps d'attente $T_3$ en minutes pour 3 appels suit une loi Erlang avec $r = 3$ et $\lambda = 0{,}2$. On veut
$$P(T_3 \leq 2) = 1 - P(T_3 > 2) = 1 - P[N(2) \leq 2] = 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-\lambda(2)} \frac{(2\lambda)^k}{k!} = 0{,}00792.$$

3. (a) On veut $P(X > 18) = 1 - \Phi((18 - 25)/4) = 1 - \Phi(-1{,}75) = 1 - 0{,}0401 = 0{,}9599$.
   (b) On veut
   $$P(27 < X < 35) = \Phi\left(\frac{35 - 25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{27 - 25}{4}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023.$$
   (c) On veut
   $$P(17 \leq X \leq 23) = \Phi\left(\frac{23 - 25}{4}\right) - \Phi\left(\frac{17 - 25}{4}\right) = \Phi(-0{,}5) - \Phi(-2) = 0{,}3085 - 0{,}0228 = 0{,}2857.$$
   (d) On veut $c$ tel que $0{,}872 = P(c - X \leq 4) = P(X \geq c - 4)$. Alors, on veut $c$ tel que
   $$0{,}128 = P(X < c - 4) = \Phi\left(\frac{(c - 4) - 25}{4}\right).$$
   Du tableau pour la $N(0, 1)$, on a $\Phi(-1{,}14) = 0{,}1271$ et $\Phi(-1{,}13) = 0{,}1292$. Prenons $-1{,}14 = (c - 29)/4$. Alors $c = 4(-1{,}14) + 29 = 24{,}44$.

4. Le volume de jus de pomme dans les boîtes remplies par une certaine machine est normalement distribué avec une moyenne de 12,05 onces et un écart type de 0,03 onces.
   Soit $X$ le volume de jus de pomme dans une boîte en onces. On a $X \sim N(\mu_X = 12{,}05, \sigma_X^2 = 0{,}03^2)$.

**[2]** (a) On veut $P(X < 12) = \Phi((12 - 12{,}05)/0{,}03) = \Phi(-1{,}67) = 0{,}0475$.

[**2**] (b) On veut $\mu$ tel que $0{,}99 = P(X \geq 12) = 1 - \Phi((12-\mu)/0{,}03)$. Ce qui implique

$$0{,}01 = \Phi\left(\frac{12-\mu}{0{,}03}\right) \quad \Rightarrow \quad -2{,}33 = \frac{12-\mu}{0{,}03} \quad \Rightarrow \quad \mu = 12 - (-2{,}33)(0{,}03) = 12{,}0699.$$

[**2**] (c) Si nous modifions plutôt l'écart type, mais fixons la moyenne à 12,05 onces, à quelle valeur devrions-nous fixer l'écart type afin que 99 % des boîtes contiennent 12 onces ou plus de jus de pomme?
On veut $\sigma$ tel que $0{,}99 = P(X \geq 12) = 1 - \Phi((12-12,05)/\sigma)$. Ce qui implique

$$0{,}01 = \Phi\left(\frac{12-12{,}05}{\sigma}\right) \quad \Rightarrow \quad -2{,}33 = \frac{12-12{,}05}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{12-12{,}05}{-2{,}03} = 0{,}02463.$$

5. Voici les statistiques d'ordre :

2,6 3,5 3,5 3,5 4,2 4,4 4,6 4,6 5,4 5,8 5,8 7,2 8,9 8,9 10,3 10,3 11,5

[**1**] (a) La moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n = 105/17 = 6{,}1765$.

Le rang de la médiane est $(n+1)50\% = (17+1)(0{,}5) = 9$.
Alors, la médiane de l'échantillon est $\tilde{x} = y_9 = 5{,}4$.

[**1**] (b) Le rang de $q_1$ est $(n+1)\,25\% = 4{,}5$, alors

$$q_1 = y_4 + 0{,}5\,(y_5 - y_4) = 3{,}5 + 0,5\,(4{,}2 - 3{,}5) = 3{,}85.$$

Le rang de $q_3$ est $(n+1)\,75\% = 13{,}5$, alors

$$q_3 = y_{13} + 0{,}5\,(y_{14} - y_{13}) = 8{,}9 + 0,5\,(8{,}9 - 8{,}9) = 8{,}9.$$

[**1**] (d) L'étendue est $\max - \min = 11{,}5 - 2{,}6 = 8{,}9$ et la distance interquartile est DIQ $= q_3 - q_1 = 8{,}9 - 3{,}85 = 5{,}05$.

[ /**15**]