**MAT 2777 (Hiver 2017)**

**Devoir 3 - solutionnaire**

*Il y a 3 questions*

1. (a) Voici les fonctions masses marginales pour $X$ et $Y$.

$$p_X(x) = \begin{cases} 15/50, & x = -2 \\ 25/50, & x = 0 \\ 8/50, & x = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 17/50, & y = -5 \\ 15/50, & y = 0 \\ 18/50, & y = 5 \end{cases}$$

[**1**] Alors,

$$\mu_X = E[X] = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = (-2)\left(\frac{15}{50}\right) + 0\left(\frac{25}{50}\right) + 2\left(\frac{8}{50}\right) = \frac{-14}{50} = -0{,}28$$

[**1**] et

$$\mu_Y = E[Y] = \sum_{y \in R_Y} y\, p_Y(x) = (-5)\left(\frac{17}{50}\right) + 0\left(\frac{15}{50}\right) + 5\left(\frac{18}{50}\right) = \frac{5}{50} = 0{,}1.$$

[**1**] Avec la fonction masse de prob. conjointe, on calcul

$$E[XY] = \sum_{x \in R_{XY}} x\, y\, p_{XY}(x,y) = 60/50 = 1{,}2.$$

[**1**] Alors, la covariance entre $X$ et $Y$ est

$$\text{Cov}[X,Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y = 1{,}2 - (-0{,}28)(0{,}1) = 1{,}228$$

[**1**] (b) Puisque $\text{Cov}[X,Y] \neq 0$, alors $X$ et $Y$ **ne** sont **pas** indépendantes.

(c) On a

$$E[X^2] = \sum_{x \in R_X} x^2 \times p_X(x) = (-2)^2\left(\frac{15}{50}\right) + 0^2\left(\frac{25}{50}\right) + 2^2\left(\frac{8}{50}\right) = \frac{92}{50}$$

$$E[Y^2] = \sum_{y \in R_Y} y^2 \times p_Y(y) = (-5)^2\left(\frac{17}{50}\right) + 0^2\left(\frac{15}{50}\right) + 5^2\left(\frac{18}{50}\right) = \frac{875}{50}$$

[**1**] et alors,

$$V[X] = E[X^2] - \mu_X^2 = \frac{92}{50} - (-0,!28)^2 = 1{,}7616;$$

[**1**]

$$V[Y] = E[Y^2] - \mu_Y^2 = \frac{875}{50} - (0{,}1)^2 = 17{,}49.$$

[**2**] Donc,

$$V[X+2Y] = V[X]+V[2Y]+2\text{Cov}[X,2Y] = V[X]+2^2V[Y]+2\times 2\text{Cov}[X,Y] = 1,7616+4(17{,}49)+4\,(1,228) = 76\,6336$$

[**2**] et

$$\begin{aligned} V[7X-Y] &= V[7X] + V[-Y] + 2\text{Cov}[7X,-Y] = 7^2V[X] + (-1)^2V[Y] + (2)(7)(-1)\text{Cov}[X,Y] \\ &= (49)(1{,}7616) + (1)(17{,}49) + (-14)(1{,}228) = 86{,}6164 \end{aligned}$$

[**1**] 2. (a)

$$P(X=-1)=p_{XY}(-1,-1)+p_{XY}(-1,0)=\frac{1}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5}{20}=0{,}25$$

[**1**]

$$P(X=-1|Y=-1)=\frac{P(X=1,Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{p_{XY}(-1,-1)}{p_{XY}(-1,-1)}=1.$$

[**2**] (b)

$$p_X(x)=\begin{cases} 1/20+4/20=5/20, & x=-1\\ 2/20+7/20+2/20=11/20, & x=0\\ 3/20, & x=1\\ 1/20, & x=2\end{cases} \quad \text{et} \quad p_Y(y)=\begin{cases} 1/20, & y=-2\\ 1/20, & y=-1\\ 4/20+2/20=6/20, & y=0\\ 7/20+3/20=10/20, & y=1\\ 2/20, & y=3\end{cases}$$

[**1**] (c)

$$\mu_X=\sum_{x\in R_X} x\,p_X(x)=(-1)\left(\frac{5}{20}\right)+(0)\left(\frac{11}{20}\right)+(1)\left(\frac{3}{20}\right)+(2)\left(\frac{1}{20}\right)=0$$

[**1**]

$$E[XY]=\sum_{(x,y)\in R_{XY}} xy\times p_{XY}(x,y)=(-1)(-1)\left(\frac{1}{20}\right)+0+0+0+0+(1)(1)\frac{3}{20}+2(-2)\left(\frac{1}{20}\right)=0$$

[**1**] donc,

$$\text{Cov}[X,Y]=E[XY]-\mu_X\mu_Y=0-0\times\mu_Y=0-0=0$$

[**2**] (d) De la partie (a), on a $P(X=-1)=\frac{1}{4}\neq 1=P(X=-1|Y=-1)$. Donc, $X$ et $Y$ **ne** sont **pas** indépendantes.

En alternatif, vous auriez pu démontrer la dépendance, en utilisant les fonctions masses de probabilité marginales de la partie (b):

$$p_X(2)\,p_Y(-2)=\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}\neq\frac{1}{20}=p_{XY}(2,-2).$$

Donc, ce n'est pas vraie que $p_X(x)p_Y(y)$ est égale à $p_{XY}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in R_X\times R_Y$. Donc, $X$ et $Y$ **ne** sont **pas** indépendantes.

3. (a) Nous allons utiliser $\sum_{x=0}^{\infty}(1/2)^x=1/(1-1/2)=2$ et $\sum_{y=0}^{\infty}(1/2)^y=1/(1-1/2)=2$. Résoudre

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{(x,y)\in R_{XY}} p_{XY}(x,y)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} c\,(1/2)^x\,(1/2)^y=c\sum_{x=0}^{\infty}(1/2)^x\sum_{y=0}^{\infty}(1/2)^y\\ &= c\sum_{x=0}^{\infty}(1/2)^x\,(2)=2\,c\sum_{x=0}^{\infty}(1/2)^x=2\,c\,(2)=4\,c.\end{aligned}$$

Donc, $c=1/4$.
(b) Soit $x$ un nombre de l'ensemble $\{0,1,2,\ldots\}$. On veut

$$\begin{aligned} p_X(x)=P(X=x) &= \sum_{y\in R_Y} p_{XY}(x,y)=\sum_{y=0}^{\infty}(1/4)\,(1/2)^x\,(1/2)^y=(1/4)\,(1/2)^x\sum_{y=0}^{\infty}(1/2)^y\\ &= (1/4)\,(1/2)^x\,2=(1/2)\,(1/2)^x.\end{aligned}$$

Soit $y$ un nombre de l'ensemble $\{0,1,2,\ldots\}$. On veut

$$\begin{aligned} p_Y(y)=P(Y=y) &= \sum_{x\in R_X} p_{XY}(x,y)=\sum_{x=0}^{\infty}(1/4)\,(1/2)^x\,(1/2)^y=(1/4)\,(1/2)^y\sum_{x=0}^{\infty}(1/2)^x\\ &= (1/4)\,(1/2)^y\,2=(1/2)\,(1/2)^y.\end{aligned}$$

(c) Pour tout $(x, y) \in R_X \times R_Y$, on a

$$p_{XY}(x) = (1/4)(1/2)^x(1/2)^y = p_X(x)\, p_Y(y).$$

Donc, $X$ et $Y$ sont indépendantes.

(d) Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

[ /**20**]