Université d'Ottawa · University of Ottawa
Faculté des sciences · Faculty of Science
Mathématiques et de statistique · Mathematics and Statistics

Examen partiel pour MAT 2777 (Hiver 2017)
Probabilités et statistique pour ingénieurs.

DUREE : 80 minutes **PROFESSEUR : G. Lamothe**

Nom : ____________________ # d'étudiant :____________________

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

____

Les calculatrices sont permises. C'est un examen à livre fermé.
Une feuille de formule (à 2 côtés) est permise. Il y a 2 questions à réponses courtes et 6 questions à choix multiples. L'examen est corrigé sur un total de 14 points.

Ecrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau suivant.

Question	Réponse	Question	Réponse
1	C	4	C
2	B	5	E
3	E	6	B

Questions à réponses courtes

1. Une compagnie d'approvisionnement en produits chimiques envoie un certain solvant dans des fûts de 10 gallons. Soit X le nombre de fûts commandés par un client choisi au hasard. Supposons que X ait la fonction de masse de probabilité suivante :

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}5; & x = 1 \\ 0{,}2; & x = 2 \\ 0{,}1; & x = 3 \\ 0{,}1; & x = 4 \\ 0{,}1; & x = 5 \end{cases}$$

[1] (a) Calculer la probabilité que moind de 3 fûts soient commandés, c'est-à-dire calculer $P(X < 3)$.

[1] (b) Donner le nombre espéré de fûts commandés.

[1] (c) Calculer l'écart type du nombre de fûts commandés.

[2] (d) Supposons que le coût (en dollars) de livraison d'une commande soit $C = 100\,X + 15$. C'est 100$ par fût plus un coût fixe supplémentaire de 15$ pour la commande. Calculer la moyenne et l'écart type pour le coût de livraison pour une commande.

solution:

(a) $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}7$.

(b)

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = 1(0{,}5) + 2(0{,}2) + \ldots + 5(0{,}1) = 2{,}1.$$

(c) Calculons

$$E[X^2] = \sum_{x \in R_X} x^2\, p_X(x) = 1^2(0{,}5) + 2^2(0{,}2) + \ldots + 5^2(0{,}1) = 6{,}3.$$

Alors,

$$\sigma_X = \sqrt{E[X^2] - \mu_X^2} = \sqrt{6{,}3 - (2{,}1)^2} = 1{,}3748.$$

(d) On veut

$$\mu_C = E[100\,X + 15] = 100\,E[X] + 15 = 100(2{,}1) + 15 = 225$$

et

$$\sigma_C = \sqrt{V[C]} = \sqrt{V[100\,X + 15]} = \sqrt{100^2\,V[X]} = 100\,\sigma_X = 137{,}48.$$

2. Les clients qui achètent une certaine marque de voiture peuvent commander un moteur choisi parmi trois tailles différentes. De toutes les voitures vendues, 50 % ont le moteur le plus petit, 40 % ont la taille moyenne, et 10 % ont le plus grand. Parmi les voitures avec le plus petit moteur, 8 % échouent un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat, alors que 12 % de ceux avec la taille moyenne et 16 % de ceux avec le plus grand moteur échouent un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat.

[1] (a) Quelle est la probabilité qu'une voiture choisie au hasard échoue un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat et qu'elle ait le plus petit moteur?

[1] (b) Quelle est la probabilité qu'une voiture choisie au hasard échoue un essai d'émissions dans les deux ans de l'achat?

[1] (c) Une voiture choisie au hasard échoue l'essai d'émissions dans les deux ans de l'achat. Quelle est la probabilité qu'elle ait le plus petit moteur?

solution: Soit E l'événement que la voiture échoue l'essai d'émissions dans les deux ans de l'achat. Soient A, B, C l'événement que la voiture ait le plus petit moteur, ait le moteur de taille moyenne, et ait le plus grand moteur, respectivement. Nous avons $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}1$, $P(E|A) = 0{,}08$, $P(E|B) = 0{,}12$, et $P(E|C) = 0{,}16$.

(a) $P(E \cap A) = P(E|A)P(A) = (0{,}08)(0{,}5) = 0{,}04$.

(b)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) \\ &= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) \\ &= (0{,}08)(0{,}5) + (0{,}12)(0{,}4) + (0{,}1)(0{,}16) = 0{,}104 \end{aligned}$$

(c) $P(A|E) = P(A \cap E)/P(E) = 0{,}04/0{,}104 = 0{,}3846$

Questions à choix multiples

Ecrire vos réponses aux questions à choix multiples dans le tableau qui se trouve sur la première page.

[1] 1. Soit R l'événement que le radar d'un avion fonctionne, et soit G l'événement que le GPS de l'avion fonctionne. Nous savons que R et G sont indépendants. Nous savons aussi que $P(R) = 0{,}7$ et $P(G) = 0{,}9$. L'avion a besoin d'un radar fonctionnant ou d'un GPS fonctionnant pour trouver son chemin la nuit (il suffit d'avoir au moins un de ces deux instruments fonctionnant pour que l'avion trouve son chemin). Quelle est la probabilité que l'avion puisse trouver son chemin la nuit?

A) 0,75 B) 0,85 C) 0,97 D) 0,03 E) 0,99

Solution: La réponse est C.

$$\begin{aligned} P(R \cup G) &= P(R) + P(G) - P(R \cap G) \\ &= P(R) + P(G) - P(R)\,P(G) \\ &= 0{,}7 + 0{,}9 - (0{,}7)(0{,}9) = 0{,}97. \end{aligned}$$

[1] 2. La probabilité qu'un sous-marin ait une mauvaise hélice est 0,3, la probabilité qu'il ait un mauvais périscope est 0,4, et la probabilité qu'il ait les deux défauts est 0,1.

Quelle est la probabilité que le sous-marin ait une mauvaise hélice mais un bon périscope?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,12 D) 0,5 D) 0,3 E) 0,4

Solution: Soit A l'événement d'avoir une mauvaise hélice et B l'événement d'avoir un mauvais périscope. On a $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. On veut $P(A \cap B') = P(E) - P(E \cap F) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$.
La réponse est B.

[1] 3. La concentration d'un réactif est une variable aléatoire avec la fonction de densité de probabilité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x+x^2), & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité que la concentration soit supérieure à 0,5? (*Astuce* : Vous devrez d'abord trouver la valeur de la constante k.)

A) 0,5 B) 0,75 C) 0,2 D) 0,25 E) 0,8

Solution: Résoudre

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = k\int_0^1 x + x^2\, dx = k\,(1/2 + 1/3).$$

On obtient $k = 6/5$. On veut

$$P(X > 0{,}5) = \int_{0{,}5}^1 (6/5)(x+x^2)\, dx = (6/5)(x^2/2 + x^3/3)\Big|_{0{,}5}^1 = 0{,}8.$$

La réponse est E.

[1] 4. Nous programmons un ordinateur pour générer un NIP à 4 chiffres au hasard, permettant des chiffres répétés. Les chiffres sont choisis dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. En supposant que tous les NIPs à 4 chiffres possibles sont équiprobables, quelle est la probabilité que le programme va générer un NIP à 4 chiffres sans chiffres répétés, c'est-à-dire que nous obtenons 4 chiffres distincts?

A) $\binom{6}{4}/\binom{10}{4}$
B) $\binom{10}{4}/(10 \times 9 \times 8 \times 7)$
C) $(10 \times 9 \times 8 \times 7)/10^4$
D) $\binom{10}{4}/10^4$
E) $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2)/(10 \times 9 \times 8 \times 7)$

Solution : La réponse est C.
Le nombre de NIP possibles à 4 chiffres est $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ et le

nombre de NIP possibles à 4 chiffres sans-répétition est $10 \times 9 \times 8 \times 7$. Selon le modèle équiprobable, la probabilité de générer un NIP avec 4 chiffres distinctes est $10 \times 9 \times 8 \times 7/10^4$.

[1] 5. Une grande entreprise industrielle permet un escompte sur toute facture payée dans un délai d'un mois. De toutes les factures, 10% reçoivent l'escompte. Dans une vérification d'entreprise, 12 factures sont sélectionnées au hasard. Quelle est la probabilité qu'au plus 1 des 12 factures dans l'échantillon ait reçu l'escompte?

A) 0,7665 B) 0,3766 C) 0,5795 D) 0,1667 E) 0,6590

Solution: Soit X le nombre de facteurs qui ont reçu l'escompte parmi les 12 factures dans l'échantillon. X suit une loi binomiale avec $n = 12$ et $p = 0\,1$. On veut

$$P(X \leq 1) = \binom{12}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{12} + \binom{12}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^{11} = 0{,}6590.$$

La réponse est E.

[1] 6. Considérons la fonction de masse de probabilité conjointe suivante :

x	y	$p_{XY}(x,y)$
1	1	5/20
1	2	1/20
2	1	2/20
2	3	3/20
3	1	3/20
3	2	1/20
3	3	5/20

Nous avons calculé :

$$E[X] = 2{,}15; \quad E[Y] = 1{,}9; \quad V[X] = 0{,}7275; \quad V[Y] = 0{,}89,$$

Déterminer $V[3X + 5Y]$, aroundie au plus proche entier.

A) 24 B) 40 C) 7 D) 25 E) 82

Solution :

$$\begin{aligned}
& E[XY] \\
= \; & 1\times 1\times \frac{5}{20} + 1\times 2\times \frac{1}{20} + 2\times 1\times \frac{2}{20} + 2\times 3\times \frac{3}{20} + 3\times 1\times \frac{3}{20} \\
& +3\times 2\times \frac{1}{20} + 3\times 3\times \frac{5}{20} \\
= \; & \frac{89}{20} = 4{,}45
\end{aligned}$$

alors

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]\times E[Y] = 4{,}45 - (2{,}15)(1{,}9) = 0{,}365$$

et alors

$$\begin{aligned}
V[3X+5Y] &= V[3\,X] + V[5\,Y] + 2\mathrm{Cov}[3\,X, 5\,Y] \\
&= 3^2\,V[X] + 5^2\,V[Y] + 2(3)(5)\mathrm{Cov}[X,Y] \\
&= 9\,(0{,}7275) + 25\,(0{,}89) + 30(0{,}365) = 39{,}7475 \approx 40
\end{aligned}$$