On considère la fonction $f(x,y) = \sqrt{4+4x^2+2y^2}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 1,2,3,4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $\sqrt{4+4x^2+2y^2} = C$

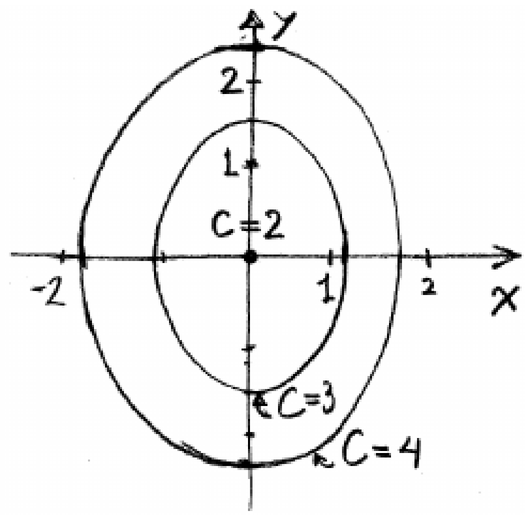
$\Leftrightarrow 4x^2+2y^2 = C^2-4.$

Ellipse passant par $\left(\pm\frac{\sqrt{C^2-4}}{2}, 0\right)$

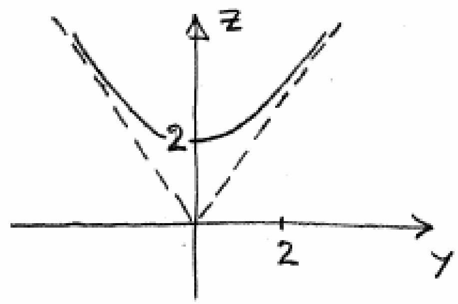
et par $\left(0, \pm\sqrt{\frac{C^2-4}{2}}\right)$

si $C \geq 2$.

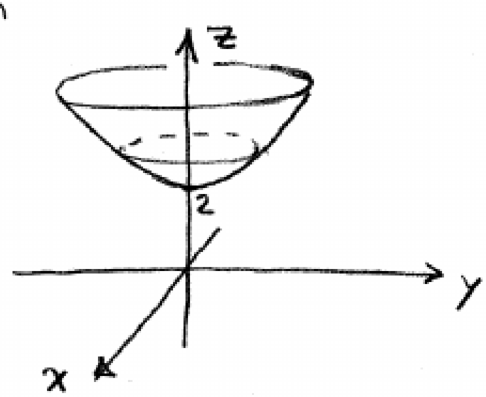
Pour $C=1$, pas de point.
Pour $C=2$, un seul point.



(ii) C'est la courbe $z = \sqrt{4+2y^2}$, une demi-hyperbole d'asymptotes $z = \pm\sqrt{2}\,y$, passant par $(0,2)$



(iii) C'est la moitié supérieure d'un hyperboloïde à deux nappes.



On considère la fonction $f(x,y) = 15 - 2x^2 - 4y^2$.

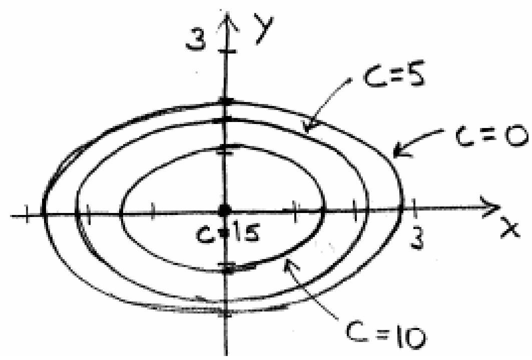
(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 0, 5, 10, 15$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

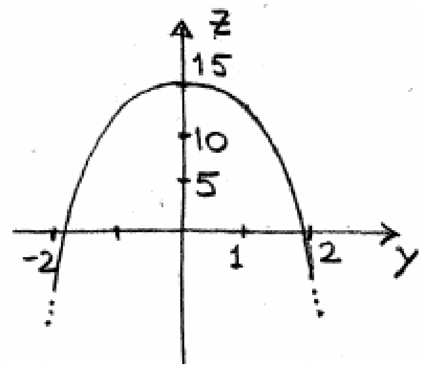
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $f(x,y) = C \iff 15 - 2x^2 - 4y^2 = C \iff 2x^2 + 4y^2 = 15 - C$

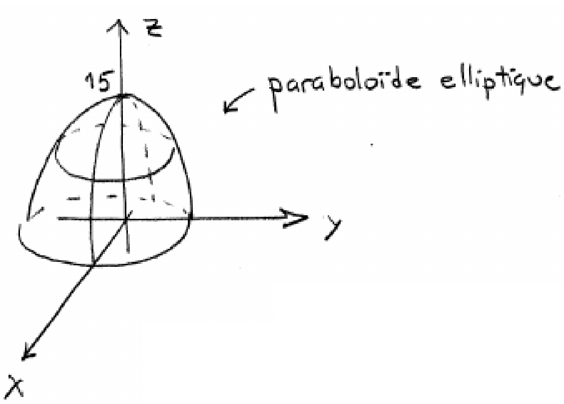
Les courbes de niveau sont des ellipses qui passent par $\left(\pm\sqrt{(15-C)/2}, 0\right)$ et $\left(0, \pm\sqrt{(15-C)/4}\right)$ pour $C \leqslant 15$.



(ii) C'est la courbe $z = 15 - 4y^2$, une parabole ouverte vers le bas, de sommet $(y,z) = (0,15)$.



(iii)



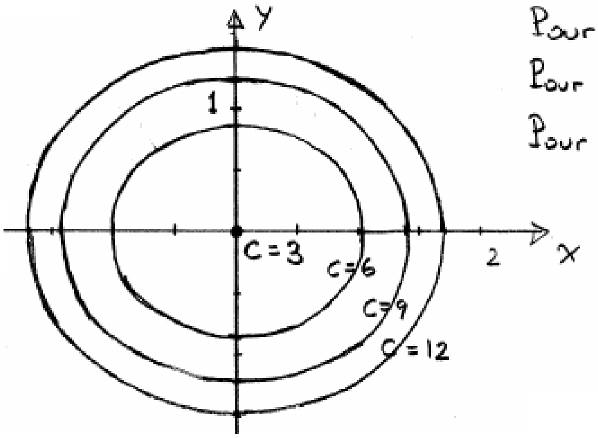
On considère la fonction $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 + 3$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x, y) = C$ pour $C = 3, 6, 9, 12$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) Ce sont des ellipses.



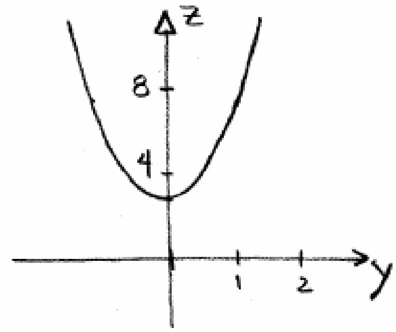
Pour $C=3$, elle est réduite à $(0,0)$.

Pour $C=6$, elle passe par $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

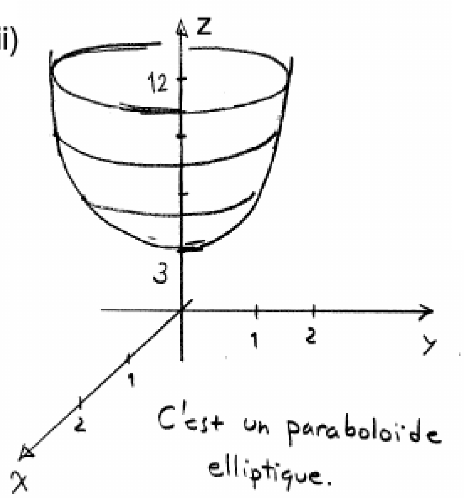
Pour $C=9$, elle passe par $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3/2})$

Pour $C=12$, elle passe par $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, \pm 3/2)$

(ii) C'est la courbe $z = 4y^2+3$, donc une parabole ouverte vers le haut.



(iii)



C'est un paraboloïde elliptique.

On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+4y^2+1}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 0,\ 1/5,\ 1/2,\ 1$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

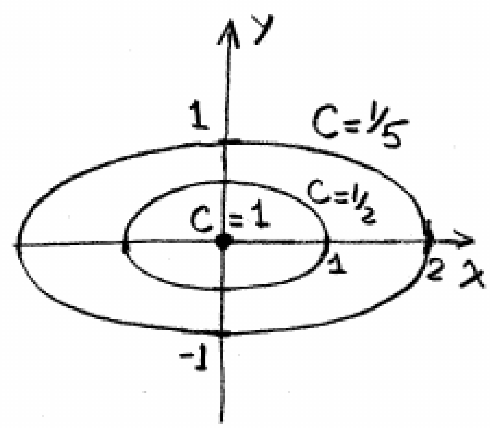
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $\dfrac{1}{x^2+4y^2+1} = C$

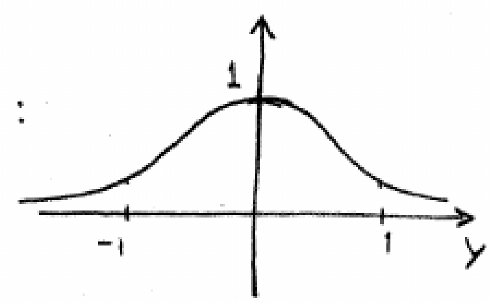
$\Leftrightarrow x^2+4y^2 = \dfrac{1}{C} - 1$

Ellipse passant par $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{C}-1},\, 0\right)$ et par $\left(0,\, \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{C}-1}\right)$ si $0 < C \leqslant 1$.

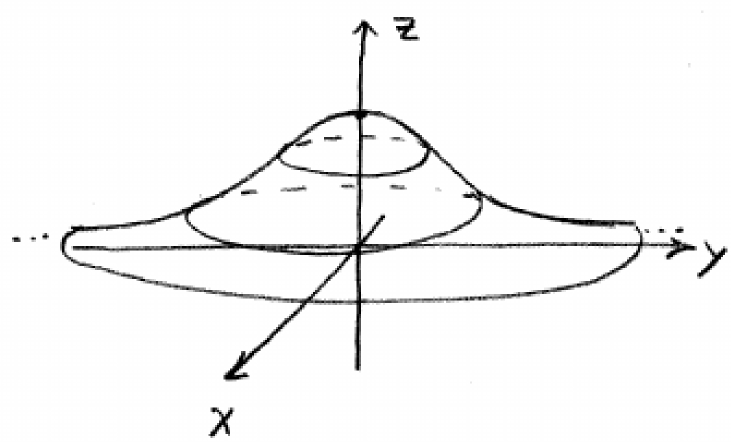
Pour $C=0$, pas de point. Pour $C=1$, un seul point.



(ii) C'est la courbe $z = \dfrac{1}{4y^2+1}$:



(iii)



On considère la surface d'équation $z^2 = 4x^2 + y^2 + 4$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $z = C$ pour $C = -4, -2, 0, 2, 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace de cette surface dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez cette surface.

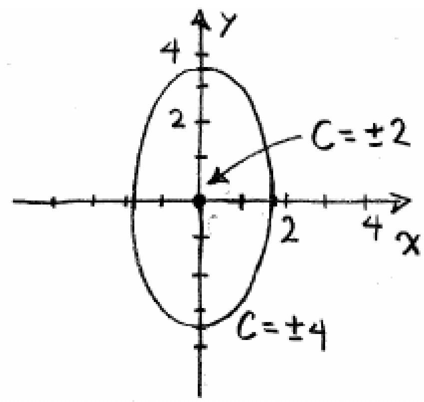
(i) $z = C \iff 4x^2+y^2 = C^2-4$

Ellipse passant par $(0, \pm\sqrt{C^2-4})$

et par $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{C^2-4}, 0)$ si $C \geq 2$.

Pour $C = 0$, pas de point.

Pour $C = \pm 2$, un seul point.

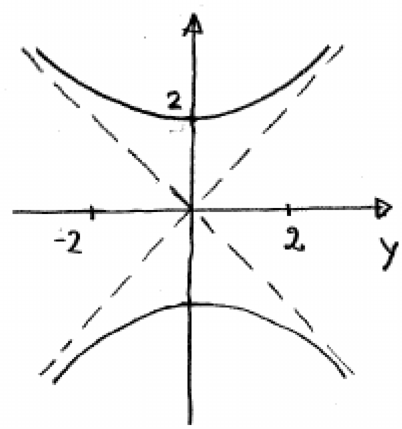


(ii) C'est la courbe $z^2 = y^2+4$

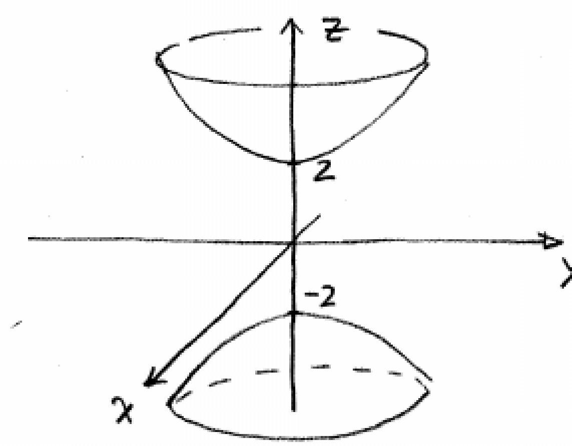
$\iff z^2 - y^2 = 4$

$\iff (z-y)(z+y) = 4$

donc une hyperbole d'asymptotes $z = \pm y$ qui passe par $(y,z) = (0, \pm 2)$.



(iii)



C'est un hyperboloïde à deux nappes.

On considère la surface d'équation $z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{4y^2}{9}$.

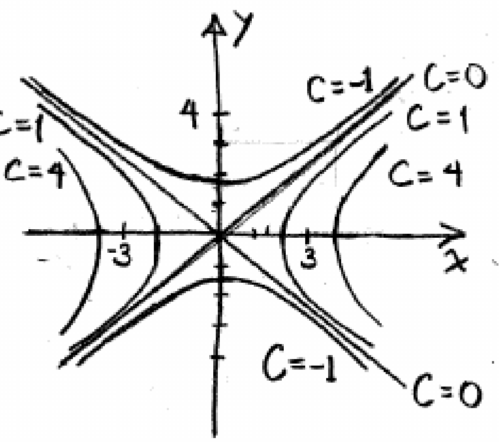
(i) Dessinez les courbes de niveau $z = C$ pour $C = -1, 0, 1, 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace de cette surface dans le plan $x = 0$.

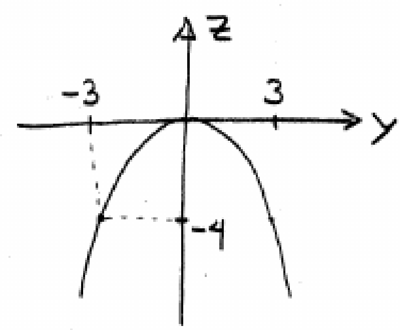
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez cette surface.

(i) $C = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{4y^2}{9} = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2y}{3}\right)$

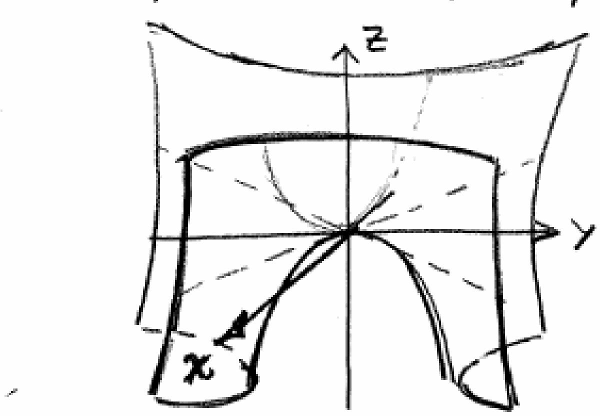
Hyperbole d'asymptote $y = \pm \frac{3}{4}x$, passant par $(0, \pm \frac{3}{2}\sqrt{-c})$ si $C \leq 0$ et par $(\pm 2\sqrt{c}, 0)$ si $C \geq 0$.



(ii) C'est la courbe $z = -\frac{4y^2}{9}$, une parabole ouverte vers le bas:



(iii) C'est un paraboloïde hyperbolique:



On considère la fonction $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 9x^2 - 4}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 0, 2, 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

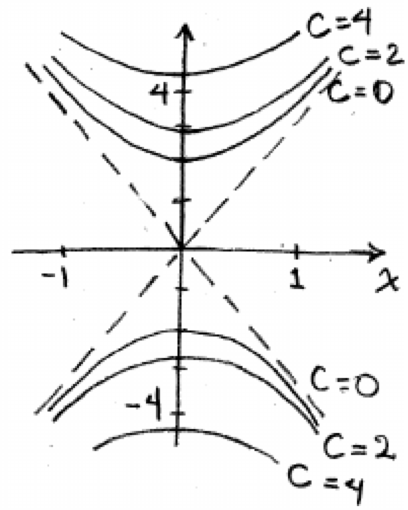
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $\sqrt{y^2-9x^2-4} = C$

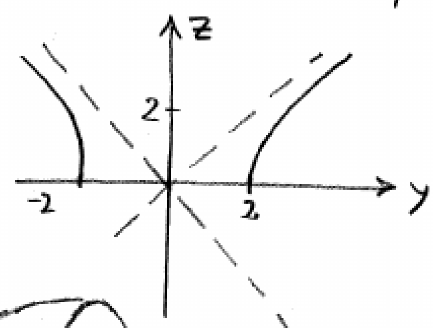
$\Leftrightarrow y^2-9x^2 = C^2+4$ et $C \geq 0$

$\Leftrightarrow (y-3x)(y+3x) = C^2+4$ et $C \geq 0$

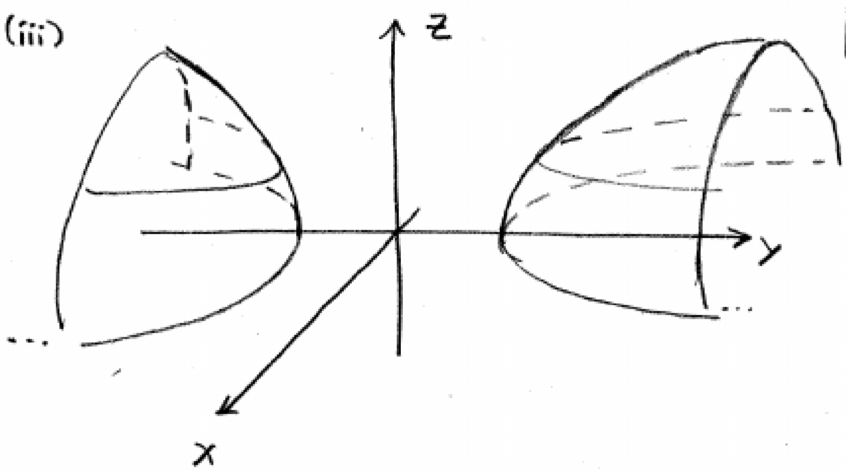
Hyperboles d'asymptotes $y = \pm 3x$ passant par $(0, \pm\sqrt{C^2+4})$.



(ii) C'est la courbe $z = \sqrt{y^2-4}$, une demi-hyperbole d'asymptotes $z = \pm y$.



(iii)



On considère la surface d'équation $z = 4y^2 - x^2$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $z = C$ pour $C = -4,\ 0,\ 4,\ 9$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

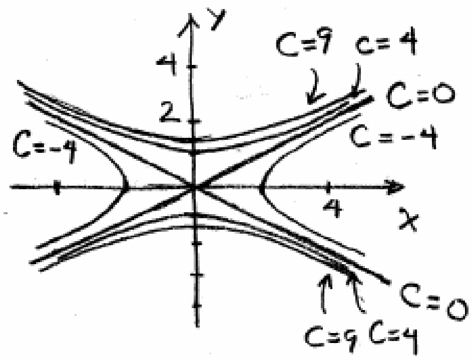
(ii) Dessinez la trace de cette surface dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez cette surface.

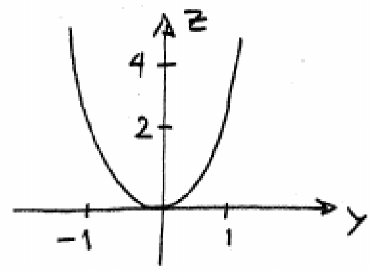
(i) $z = C \Leftrightarrow 4y^2 - x^2 = C$

$\Leftrightarrow (2y - x)(2y + x) = C$

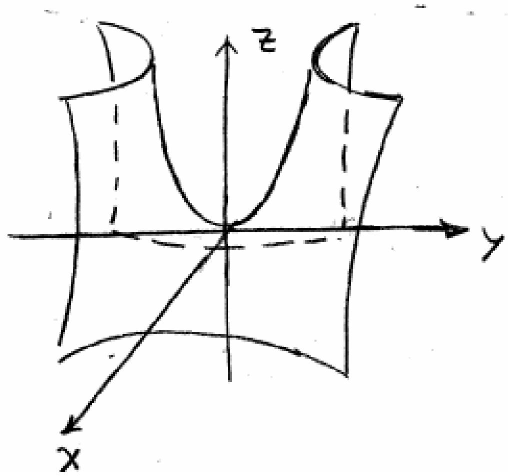
Hyperbole d'asymptotes $y = \pm\frac{1}{2}x$ passant par $(0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{C})$ si $C \geq 0$ et par $(\pm\sqrt{-C}, 0)$ si $C \leq 0$.



(ii) C'est la courbe $z = 4y^2$, une parabole ouverte vers le haut.



(iii) C'est un paraboloïde hyperbolique:



On considère la fonction $f(x, y) = \sqrt{4 + 4x^2 + 2y^2}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x, y) = C$ pour $C = 1, 2, 3, 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $\sqrt{4+4x^2+2y^2} = C$

$\Leftrightarrow 4x^2+2y^2 = C^2-4$.

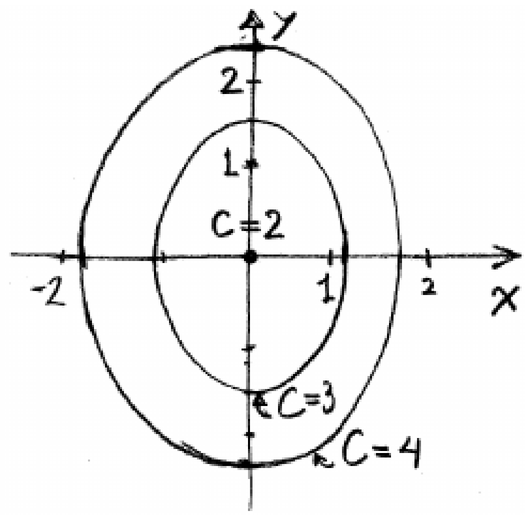
Ellipse passant par $\left(\pm\frac{\sqrt{C^2-4}}{2}, 0\right)$

et par $\left(0, \pm\sqrt{\frac{C^2-4}{2}}\right)$

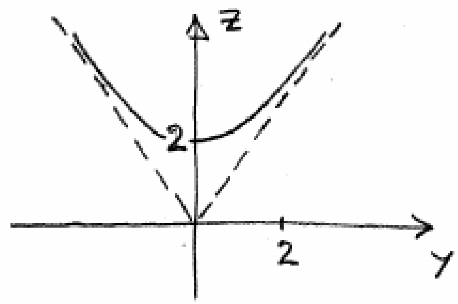
si $C \geqslant 2$.

Pour $C=1$, pas de point.

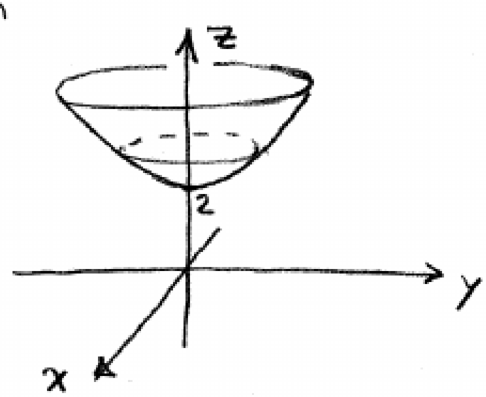
Pour $C=2$, un seul point.



(ii) C'est la courbe $z = \sqrt{4+2y^2}$, une demi-hyperbole d'asymptotes $z = \pm\sqrt{2}\, y$, passant par $(0, 2)$



(iii) C'est la moitié supérieure d'un hyperboloïde à deux nappes.



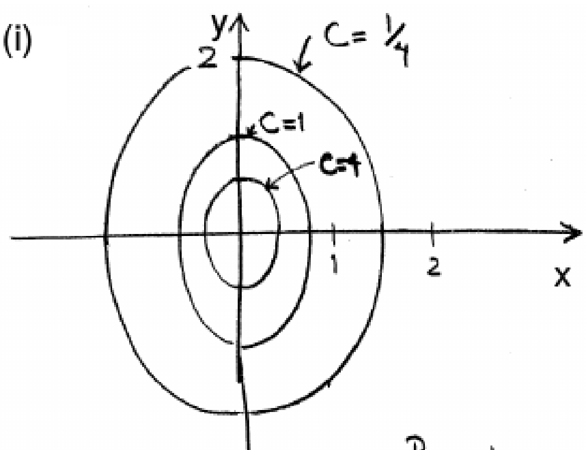
On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{2x^2+y^2}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 0,\ 1/4,\ 1,\ 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i)



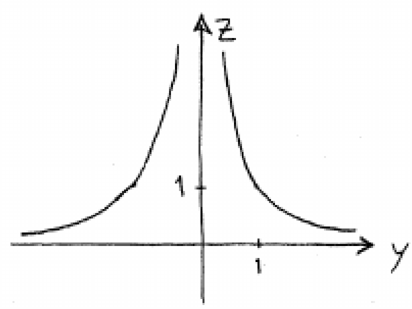
$$\frac{1}{2x^2+y^2} = C$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+y^2 = \frac{1}{C}$$

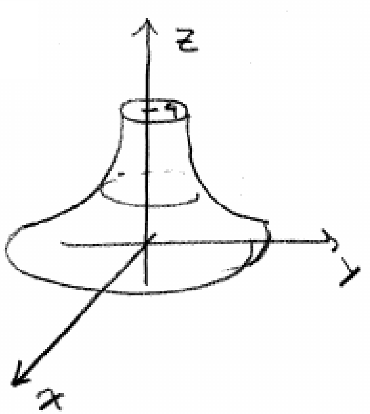
ellipse passant par $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2C}}, 0\right)$ et $\left(0, \pm\sqrt{\frac{1}{C}}\right)$ si $C>0$.

Pas de courbe de niveau pour $C=0$.

(ii) C'est la courbe $z = \dfrac{1}{y^2}$:



(iii)



On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+4y^2+1}$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $f(x,y) = C$ pour $C = 0,\ 1/5,\ 1/2,\ 1$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace du graphe de f dans le plan $x = 0$.

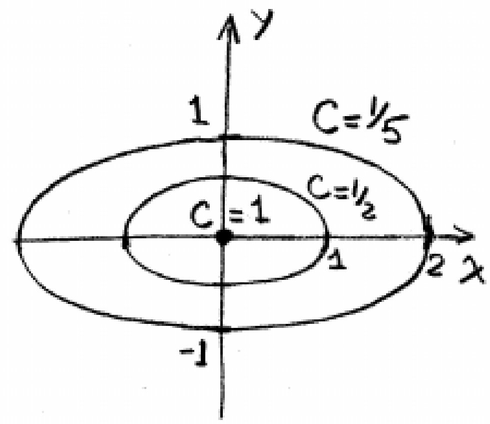
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez le graphe de cette fonction.

(i) $\dfrac{1}{x^2+4y^2+1} = C$

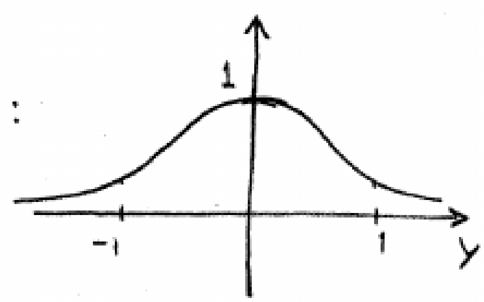
$\Leftrightarrow x^2+4y^2 = \dfrac{1}{C} - 1$

Ellipse passant par $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{C}-1},\, 0\right)$ et par $\left(0,\, \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{C}-1}\right)$ si $0<C\leqslant 1$.

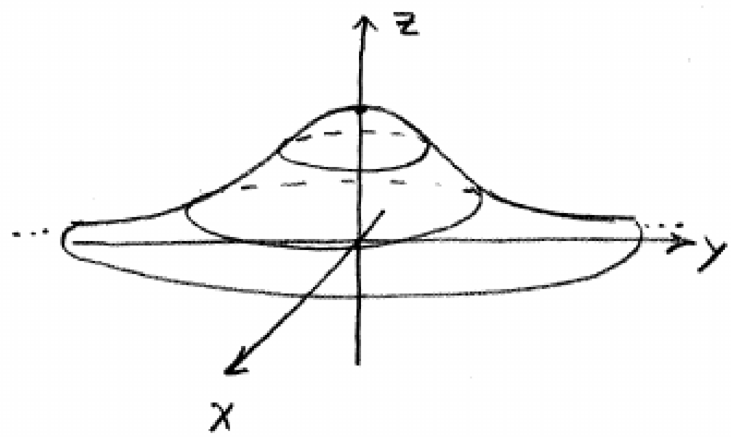
Pour $C=0$, pas de point. Pour $C=1$, un seul point.



(ii) C'est la courbe $z = \dfrac{1}{4y^2+1}$:



(iii)



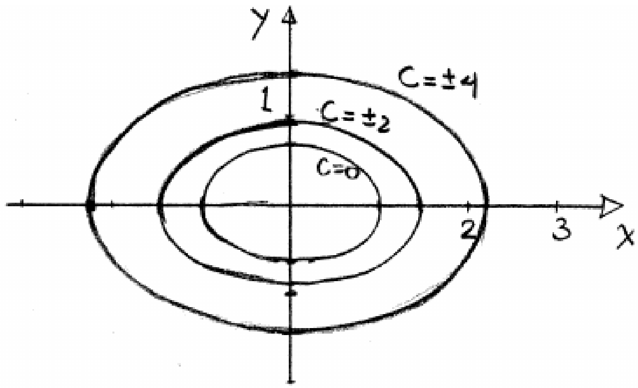
On considère la surface d'équation $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 4$.

(i) Dessinez les courbes de niveau $z = C$ pour $C = -4, -2, 0, 2, 4$ en indiquant pour chaque courbe la valeur correspondante de C. N'oubliez pas de mettre les échelles sur les axes de coordonnées.

(ii) Dessinez la trace de cette surface dans le plan $x = 0$.

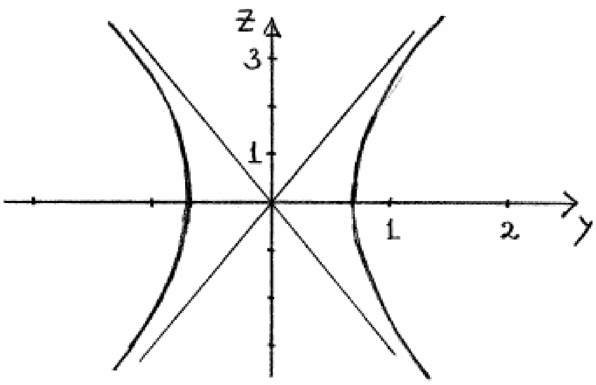
(iii) En utilisant les informations de (i) et de (ii), dessinez cette surface.

(i)



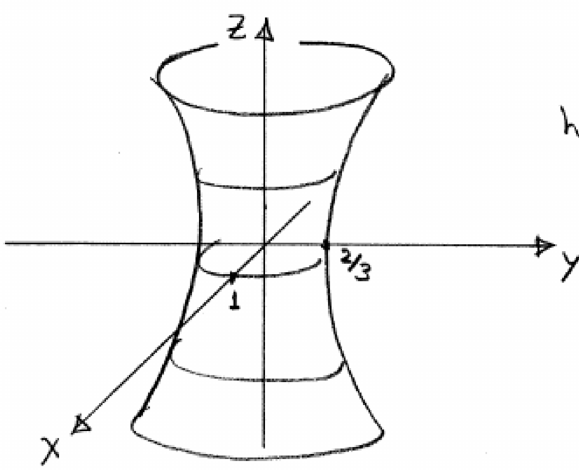
$4x^2+9y^2=4+C^2$
ellipse passant par
$(\pm\sqrt{1+\frac{C^2}{4}},0)$ et
$(0,\pm\sqrt{\frac{4+C^2}{9}})$

(ii)



$9y^2-z^2=4$
$\Leftrightarrow (3y-z)(3y+z)=4$
hyperbole
d'asymptotes $z=\pm 3y$
passant par
$(y,z)=(\pm\frac{2}{3},0)$

(iii)



hyperboloïde à une nappe