À l'aide d'un test de comparaison, déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\sin^2(x)}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

On a $\dfrac{x\sin^2(x)}{2+e^x} \leqslant \dfrac{x}{2+e^x} \leqslant \dfrac{x}{e^x}$ pour tout $x \geqslant 0$.

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x\sin^2(x)}{2+e^x}\,dx \leqslant \int_1^\infty x e^{-x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\underbrace{dx}_{du} = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\Big(\underbrace{(-be^{-b}-e^{-b})}_{\to 0} - (-e^{-1}-e^{-1})\Big)$$
$$= \frac{2}{e}$$

Donc l'intégrale converge et sa valeur est $\leqslant \frac{2}{e} \cong 0.7358$

Pourquoi $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ est-elle une intégrale impropre?
Si elle est convergente, calculez sa valeur. Sinon, justifiez pourquoi elle est divergente.

Solution. L'intégrale est impropre car la fonction $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$ n'est pas définie au point $x=2$ de l'intervalle d'intégration $[0,5]$. On a

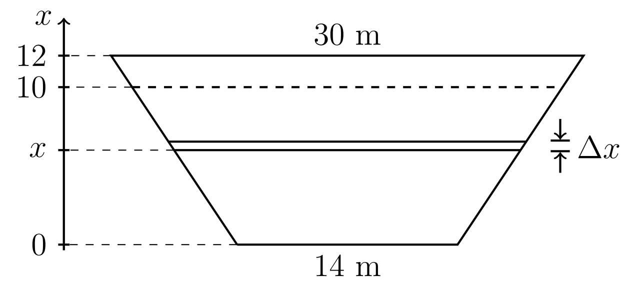
$$\int_0^5 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

pourvu que les deux intégrales de droite convergent. En posant $u = x^2-4$, on trouve

$$\int \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C.$$

Donc
$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 2^-}\frac{1}{2}(\ln|t^2-4| - \ln(4)) = -\infty.$$
Comme cette intégrale est divergente, l'intégrale donnée est elle aussi divergente.

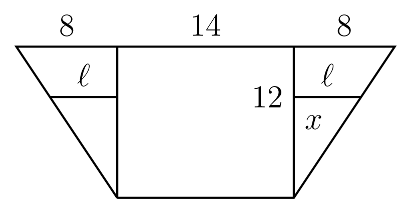
La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze isocèle comme sur la figure ci-contre. Sa largeur à la base est de 14 m, sa largeur au sommet est de 30 m, sa hauteur est de 12 m, et elle retient 10 m d'eau. On désigne par x la hauteur en mètres mesurée **à partir de la base de la digue**.



(i) Quelle est, en première approximation, la surface ΔA de la portion de digue comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ pour Δx petit?

Solution: $\Delta A \cong (14 + 2\ell)\Delta x$ où ℓ est comme sur le dessin ci-contre. La loi des triangles semblables donne

$$\frac{\ell}{x} = \frac{8}{12} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{2}{3}x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta A \cong \left(14 + \frac{4}{3}x\right)\Delta x}$$



(ii) Quelle est, en première approximation, la force hydrostatique ΔF qui s'exerce sur cette même portion de digue? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{pression hydrostatique}) \times (\text{surface}) \\ &\cong (1000 \times g \times \text{profondeur}) \times \Delta A \\ &\cong \boxed{9800(10 - x)\left(14 + \frac{4}{3}x\right)\Delta x}. \end{aligned}$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui représente la force hydrostatique totale sur la digue. Il n'est pas nécessaire de calculer sa valeur.

Réponse: C'est $F = \displaystyle\int_0^{10} 9800(10 - x)\left(14 + \frac{4}{3}x\right) \mathrm{d}x$

Utilisez un test de comparaison pour déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5-\cos x}{x^3+7}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

On a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Rightarrow 4 \leqslant 5-\cos(x) \leqslant 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $0 \leqslant \dfrac{5-\cos(x)}{x^3+7} \leqslant \dfrac{6}{x^3+7} \leqslant \dfrac{6}{x^3}$ pour tout $x>0$.

Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{6}{x^3}\,dx = 6\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 < \infty$, l'intégrale est convergente en vertu du test de comparaison (et sa valeur est $\leqslant 3$).

Déterminez si l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 \frac{3}{(x-4)^{7/3}}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donner sa valeur.

La fonction à intégrer n'est pas définie en $x=4$, mais elle est continue ailleurs. Donc l'intégrale est convergente si et seulement si $\int_1^4$ et $\int_4^5$ le sont. On trouve

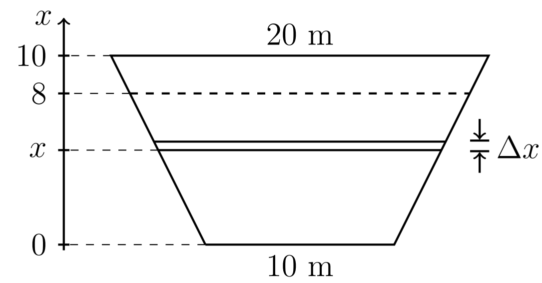
$$\int \frac{3\,dx}{(x-4)^{7/3}} = 3\int (x-4)^{-7/3}\,dx = 3\,\frac{(x-4)^{-4/3}}{(-4/3)} + C = -\frac{9}{4}(x-4)^{-4/3} + C,$$

donc $$\int_4^5 \frac{3\,dx}{(x-4)^{7/3}} = \lim_{t\to4^+}\int_t^5 \frac{3\,dx}{(x-4)^{7/3}} = \lim_{t\to4^+}\left[-\frac{9}{4}(x-4)^{-4/3}\right|_t^5$$

$$= \lim_{t\to4^+}\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\frac{1}{(t-4)^{4/3}}\right) = +\infty.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_4^5 \frac{3\,dx}{(x-4)^{7/3}}$ est divergente, donc $\boxed{\displaystyle\int_1^5 \frac{3\,dx}{(x-4)^{7/3}} \text{ est divergente.}}$

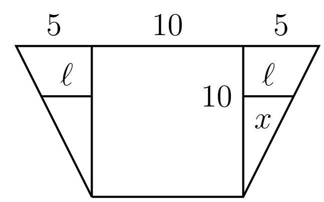
La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze isocèle comme sur la figure ci-contre. Sa largeur à la base est de 10 m, sa largeur au sommet est de 20 m, sa hauteur est de 10 m, et elle retient 8 m d'eau. On désigne par x la hauteur en mètres mesurée **à partir de la base de la digue**.



(i) Quelle est, en première approximation, la surface ΔA de la portion de digue comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ pour Δx petit?

Solution: $\Delta A \cong (10 + 2\ell)\Delta x$ où ℓ est comme sur le dessin ci-contre. La loi des triangles semblables donne

$$\frac{\ell}{x} = \frac{5}{10} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{1}{2}x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta A \cong (10 + x)\,\Delta x}$$



(ii) Quelle est, en première approximation, la force hydrostatique ΔF qui s'exerce sur cette même portion de digue? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{pression hydrostatique}) \times (\text{surface}) \\ &\cong (1000 \times g \times \text{profondeur}) \times \Delta A \\ &\cong \boxed{9800(8 - x)\,(10 + x)\,\Delta x}. \end{aligned}$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui représente la force hydrostatique totale sur la digue. Il n'est pas nécessaire de calculer sa valeur.

Réponse: C'est $F = \displaystyle\int_0^8 9800(8 - x)\,(10 + x)\,\mathrm{d}x$

Déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+3x^2}$ est convergente ou divergente en utilisant un test de comparaison approprié. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

Solution. Pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \leq x^2$, donc

$$3x^2 \leq \sqrt{x}+3x^2 \leq 4x^2$$

puis

$$\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \frac{1}{3x^2}$$

et par suite

$$\frac{1}{4} = \int_1^\infty \frac{dx}{4x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

En particulier l'intégrale est convergente et elle vaut au plus $1/3$.

Déterminez si l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{3}{(x-1)^{5/3}}\,\mathrm{d}x$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez sa valeur.

On a une singularité en $x=1$. L'intégrale est convergente ssi $\int_0^1$ et $\int_1^4$ le sont. On trouve

$$\int \frac{3}{(x-1)^{5/3}}dx = \int 3u^{-5/3}du \quad \text{en posant } u=x-1$$

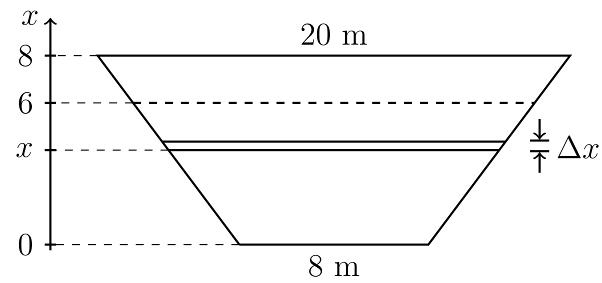
$$= \frac{3u^{-2/3}}{-2/3}+C = -\frac{9}{2}(x-1)^{-2/3}+C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{3}{(x-1)^{5/3}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{3\,dx}{(x-1)^{5/3}} = \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{9}{2}\frac{1}{(t-1)^{2/3}}+\frac{9}{2}\right)$$

$$= -\infty$$

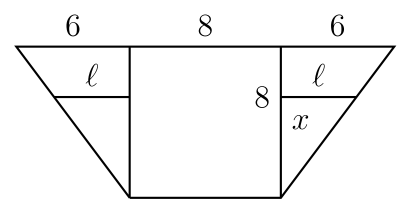
L'intégrale est $\boxed{\text{divergente.}}$

La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze isocèle comme sur la figure ci-contre. Sa largeur à la base est de 8 m, sa largeur au sommet est de 20 m, sa hauteur est de 8 m, et elle retient 6 m d'eau. On désigne par x la hauteur en mètres mesurée **à partir de la base de la digue**.



(i) Quelle est, en première approximation, la surface ΔA de la portion de digue comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ pour Δx petit?

Solution: $\Delta A \cong (8 + 2\ell)\Delta x$ où ℓ est comme sur le dessin ci-contre. La loi des triangles semblables donne



$$\frac{\ell}{x} = \frac{6}{8} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{3}{4}x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta A \cong \left(8 + \frac{3}{2}x\right)\Delta x}$$

(ii) Quelle est, en première approximation, la force hydrostatique ΔF qui s'exerce sur cette même portion de digue? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{pression hydrostatique}) \times (\text{surface}) \\ &\cong (1000 \times g \times \text{profondeur}) \times \Delta A \\ &\cong \boxed{9800(6-x)\left(8 + \frac{3}{2}x\right)\Delta x}. \end{aligned}$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui représente la force hydrostatique totale sur la digue. Il n'est pas nécessaire de calculer sa valeur.

Réponse: C'est $F = \displaystyle\int_0^6 9800(6-x)\left(8 + \frac{3}{2}x\right)\,\mathrm{d}x$

À l'aide d'un test de comparaison, déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2-\cos^2(x)}{x^2+e^x}\,\mathrm{d}x$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

Solution. On a $1 \leqslant 2-\cos^2(x) \leqslant 2$ car $\cos^2(x) \in [0,1]$,

et $x^2+e^x \geqslant x^2$, donc

$$0 \leqslant \frac{2-\cos^2(x)}{x^2+e^x} \leqslant \frac{2}{x^2} \quad \text{pour tout } x \geqslant 1.$$

Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$, le critère de comparaison montre que l'intégrale donnée est $\boxed{\text{convergente.}}$

Sa valeur est ≤ 2.

Déterminez si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez sa valeur exacte.

Solution: On a une singularité en $x=8$. En posant $u=8-x$, on trouve

$$\int \frac{x}{(8-x)^{1/3}}dx = \int \frac{8-u}{u^{1/3}}(-du) = \int \frac{u-8}{u^{1/3}}du = \int u^{2/3}du - 8\int u^{-1/3}du$$

$$= \frac{u^{5/3}}{5/3} - 8\,\frac{u^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{5}(8-x)^{5/3} - 12(8-x)^{2/3} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{1/3}}\,dx = \lim_{t\to 8^-}\int_0^t \frac{x}{(8-x)^{1/3}}\,dx$$

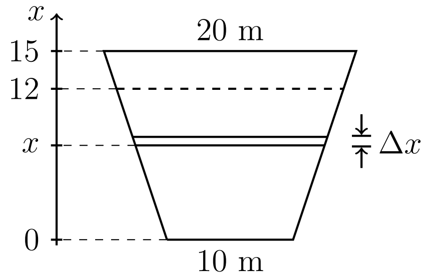
$$= \lim_{t\to 8^-}\left[\frac{3}{5}(8-x)^{5/3} - 12(8-x)^{2/3}\right|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 8^-}\left(\left(\frac{3}{5}(8-t)^{5/3} - 12(8-t)^{2/3}\right) - \left(\frac{3}{5}\cdot 8^{5/3} - 12\cdot 8^{2/3}\right)\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{96}{5} - 48\right) = \boxed{\frac{144}{5}}$$

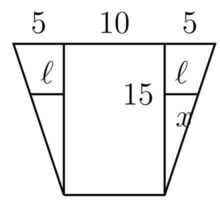
intégrale <u>convergente</u> !

La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze isocèle comme sur la figure ci-contre. Sa largeur à la base est de 10 m, sa largeur au sommet est de 20 m, sa hauteur est de 15 m, et elle retient 12 m d'eau. On désigne par x la hauteur en mètres mesurée **à partir de la base de la digue**.



(i) Quelle est, en première approximation, la surface ΔA de la portion de digue comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ pour Δx petit?

Solution: $\Delta A \cong (10 + 2\ell)\Delta x$ où ℓ est comme sur le dessin ci-contre. La loi des triangles semblables donne



$$\frac{\ell}{x} = \frac{5}{15} \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{1}{3}x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta A \cong \left(10 + \frac{2}{3}x\right)\Delta x}$$

(ii) Quelle est, en première approximation, la force hydrostatique ΔF qui s'exerce sur cette même portion de digue? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.

Réponse:
$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{pression hydrostatique}) \times (\text{surface}) \\ &\cong (1000 \times g \times \text{profondeur}) \times \Delta A \\ &\cong \boxed{9800(12 - x)\left(10 + \frac{2}{3}x\right)\Delta x}. \end{aligned}$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui représente la force hydrostatique totale sur la digue. Il n'est pas nécessaire de calculer sa valeur.

Réponse: C'est $F = \displaystyle\int_0^{12} 9800(12 - x)\left(10 + \frac{2}{3}x\right)\,\mathrm{d}x$