1. Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{2^n}{2^n + 3^n}$ des 10 premiers termes de la série $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{10} = s - s_{10}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: On trouve

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n} \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{(2/3)^{11}}{1 - (2/3)} = 3 \cdot (2/3)^{11} \cong 0.0347\,.$$

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Selon le test de l'intégrale, combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}$ doit-on additionner pour que l'erreur d'approximation soit au plus 10^{-4} ?

Solution: C'est une série à valeurs **positives** de terme général $a_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{4}{x^3}$ est une fonction décroisante de x à valeurs positives pour $x > 0$. En posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{4}{n^3} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

le critère de l'intégrale donne

$$R_k = s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{4}{n^3} \leq \int_k^{\infty} \frac{4}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{2}{x^2} \right|_k^t = \frac{2}{k^2}.$$

On trouve

$$\frac{2}{k^2} \leq 10^{-4} \iff k^2 \geq 20000 \iff k \geq 142.$$

Il suffit donc d'additionner 142 termes.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente. **Vrai**

- La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est divergente si $|r| \geq 1$ et $a \neq 0$. **Vrai**

1. En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ est convergente ou divergente.

Solution: Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2n^{3/2}}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

(série de Riemann avec $p = 3/2 > 1$). Donc la série donnée est convergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. $\boxed{\text{Vrai}}$

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est convergente car $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1+2^n}$ des 10 premiers termes de la série $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{10} = s - s_{10}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: On trouve

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2^{11}}{1-(1/2)} = 2^{-10}.$$

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{Vrai}}$

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Selon le test de l'intégrale, combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ doit-on additionner pour que l'erreur d'approximation soit au plus 10^{-2} ?

Solution: C'est une série à valeurs **positives** de terme général $a_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ est une fonction décroisante de x à valeurs positives pour $x > 0$. En posant

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{3/2}} \quad (\text{pour } k \geq 1),$$

le critère de l'intégrale donne

$$R_k = s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{2}{x^{1/2}} \right|_k^t = \frac{2}{k^{1/2}}.$$

On trouve

$$\frac{2}{k^{1/2}} \leq 10^{-2} \iff k^{1/2} \geq 200 \iff k \geq 40000.$$

Il suffit donc d'additionner 40000 termes.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est divergente si $p \geq 1$. **Faux**

- La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ quels que soient a et r. **Faux**

1. En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sin(n)^2}$ est convergente ou divergente.

Solution: Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n}{n^2+\sin(n)^2} \geq \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\sin(n)^2} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(série harmonique). Donc la série donnée est divergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. $\boxed{\text{Faux}}$

- La série harmonique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est convergente car $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{10} = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{\sin(n)^2}{n^3}$ des 10 premiers termes de la série $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{n^3}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{10} = s - s_{10}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: Comme $\sin(n)^2 \le 1$ pour tout n, on trouve

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{n^3} \le \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Comme $f(x) = 1/x^3$ est décroissante pour $x > 0$, le test de l'intégrale donne

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{10}^{t} = \frac{1}{200} = 0.005$$

L'erreur d'approximation est donc au plus 0.005

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{Vrai}}$

- Si $0 \le a_n \le b_n$ pour tout $n \ge 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. $\boxed{\text{Vrai}}$

1. Expliquez pourquoi le test de l'intégrale s'applique à la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Ensuite utilisez ce test pour déterminer si la série est convergente ou divergente.

Solution: Le terme général de cette série est $f(n)$ où

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

est une fonction continue, décroissante, à valeurs positives pour $x > 1$, donc aussi pour $x \geq 3$. Alors le test de l'intégrale s'applique. Il montre la série est convergente si et seulement si $\int_3^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

En posant $u = \ln x$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et on obtient

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1} + C = -(\ln x)^{-1} + C$$

donc

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-(\ln x)^{-1}\right|_3^t = \lim_{t\to\infty} \big(-(\ln t)^{-1} + (\ln 3)^{-1}\big) = (\ln 3)^{-1}.$$

Donc la série est convergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. $\boxed{\text{Vrai}}$

- La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ quels que soient a et r. $\boxed{\text{Faux}}$

1. En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}}$ est convergente ou divergente.

Solution: Le terme général de la série se comporte comme $n^3/\sqrt{n^7} = 1/n^{1/2}$. On s'attend donc à ce que cette série diverge. Pour le montrer, on doit minorer son terme général. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{n^3}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{n^3}{\sqrt{9n^7}} = \frac{1}{3n^{1/2}}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$$

(série de Riemann avec $p = 1/2 \leq 1$). Donc la série donnée est divergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{20} = \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n+n^2}$ des 20 premiers termes de la série $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{20} = s - s_{20}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: Comme $n + n^2 \geq n^2$ pour tout $n \geq 1$, on trouve

$$R_{20} = \sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} \leq \sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $f(x) = 1/x^2$ est décroissante pour $x > 0$, le test de l'intégrale donne

$$\sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{20}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right|_{20}^{t} = \frac{1}{20} = 0.05$$

L'erreur d'approximation est donc au plus 0.05 .

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. $\boxed{\text{Vrai}}$

- La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est divergente si $p \geq 1$. $\boxed{\text{Faux}}$

1. Expliquez pourquoi le test de l'intégrale s'applique à la série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$. Ensuite utilisez ce test pour déterminer si la série est convergente ou divergente.

Solution: Le terme général de cette série est $f(n)$ où

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$$

est une fonction continue, décroissante, à valeurs positives pour $x > e$, donc aussi pour $x \geq 3$. Alors le test de l'intégrale s'applique. Il montre la série est convergente si et seulement si $\int_3^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

En posant $u = \ln x$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et on obtient

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^{-2} + C = -\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$$

donc

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2}\right|_3^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\big(-(\ln t)^{-2} + (\ln 3)^{-2}\big) = \frac{1}{2}(\ln 3)^{-2}.$$

Donc la série est convergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente. $\boxed{\text{Faux}}$

1. En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n)}{n}$ est convergente ou divergente.

Solution: Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{2}{n} \leq \frac{3+\cos(n)}{n} \leq \frac{4}{n}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n)}{n} \geq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(série harmonique). Donc la série donnée est divergente.

2. Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. $\boxed{\text{Faux}}$

- Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. $\boxed{\text{Vrai}}$