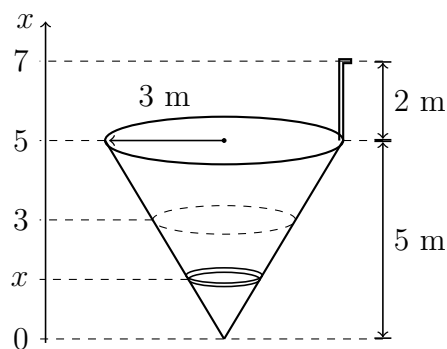


Un réservoir a la forme d'un cône droit avec la pointe en bas comme le montre la figure ci-contre.

Sa hauteur est de 5 m et son rayon à la base (c'est-à-dire le dessus du réservoir) est de 3 m. Il est rempli d'eau jusqu'à 3 m.

On veut pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir.

On note x la hauteur en mètres mesurée à **partir du fond du réservoir**.



(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x$ où r = rayon à la hauteur x

Coupe du réservoir:

la loi des triangles semblables donne:

$$\frac{r}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{r = \frac{3x}{5}} \Rightarrow \boxed{\Delta V \cong \frac{9\pi}{25} x^2 \Delta x}$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, et que $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Réponse: $\Delta W \cong (\text{poids de la couche}) \times (\text{hauteur à pomper})$

$$= (9.8 \times 1000 \times \Delta V) \times (7 - x)$$

$$= 9800 \left(\frac{9\pi}{25} x^2 \Delta x \right) (7 - x) = \boxed{3528\pi x^2 (7 - x) \Delta x}.$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper les 3 m d'eau du réservoir à 2 m au-dessus du réservoir?

Réponse: $W = \int_0^3 \left(3528\pi x^2 (7 - x) \right) dx = 3528\pi \int_0^3 (7x^2 - x^3) dx$

$$= 3528\pi \left[\frac{7}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 \cong \boxed{4.74 \times 10^5 \text{ Joules}}.$$

La longueur naturelle d'un ressort est de 20 cm et il faut exercer une force de 20 N pour l'allonger à 25 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force $F(x)$ requise pour étirer le ressort de x mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!

Solution. La loi de Hooke donne $F(x) = kx$ pour une constante k . Lorsqu'on allonge le ressort de 20 cm à 25 cm, il subit un étirement de

$$\frac{25 - 20}{100} = 0.05 \text{ m.}$$

Par hypothèse, on a $20 = k \times 0.05$, par suite $k = 400$ et $F(x) = 400x$.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 20 cm à 25 cm. Attention aux unités!

Solution. L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de 0 m à 0.05 m. Le travail requis est donc

$$\int_0^{0.05} 400x \, dx = 400 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.05} = 0.5 \text{ J.}$$

(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 25 cm à 35 cm. Attention aux unités!

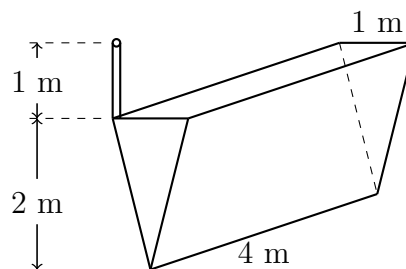
Solution. Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de 0.05 m à 0.15 m. Le travail requis est donc

$$\int_{0.05}^{0.15} 400x \, dx = 400 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.05}^{0.15} = 4 \text{ J.}$$

Un réservoir a la forme d'un prisme droit à base triangulaire comme le montre la figure ci-contre.

Ses faces verticales sont des triangles isocèles de hauteur 2 m et de base 1 m, sa longueur est de 4 m, et il est plein d'eau.

On veut pomper toute son eau à 1 m au-dessus du réservoir.



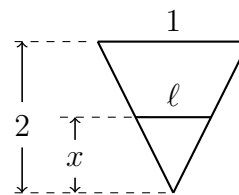
On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$.

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur 4 et de largeur ℓ où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre).

On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{1}{2} \implies \ell = \frac{x}{2}.$$



$$\implies \Delta V \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 4\ell\Delta x = 2x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 1 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 , et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Solution. On doit monter la couche de $3 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800(2x\Delta x)(3 - x) = 19600x(3 - x)\Delta x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 1 m au-dessus du réservoir.

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 2$:

$$W = \int_0^2 19600x(3 - x)dx = 19600 \int_0^2 (3x - x^2)dx = 19600 \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \cong 65300 \text{ J.}$$

Un câble qui pèse 5 N/m sert à remonter 60 N de minerai du fond d'un puits 80 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, x mètres de câble aient été remontés à la surface. Quel est, en première approximation, le travail requis pour en remonter Δx mètres de plus?

Solution. S'il y a x mètres de câble à la surface, c'est qu'il en pend $80 - x$ mètres. Le poids de ces $80 - x$ mètres de câble est $5(80 - x)$ N. Ajouté au poids du minerai, le poids total est $60 + 5(80 - x) = 460 - 5x$ N.

Pour en remonter Δx mètres de plus, le travail requis est environ

$$\Delta W \cong (460 - 5x)\Delta x$$

car, pour Δx petit, le poids de l'ensemble ne varie presque pas lorsqu'on remonte le câble de Δx mètre.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface?

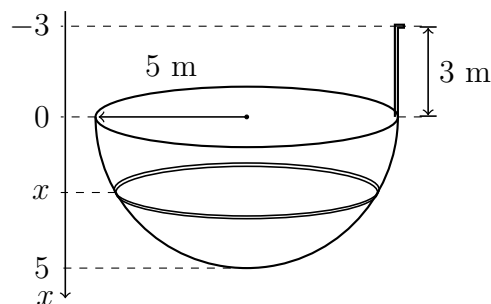
Solution. Lorsqu'on remonte la totalité du câble, la longueur x à la surface passe de 0 m à 80 m. Donc le travail est

$$W = \int_0^{80} (460 - 5x) dx = 20800 \text{ J}$$

Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 5 m de rayon, ouvert vers le haut comme le montre la figure ci-contre.

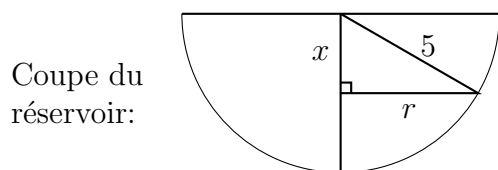
Il est rempli d'eau et on veut pomper toute cette eau à 3 m au-dessus du réservoir.

On note x la profondeur en mètres mesurée **à partir du dessus du réservoir** (voir le dessin).



(a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les profondeurs x et $x + \Delta x$?

Réponse: $\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x$ où r = rayon à la profondeur x



le théorème de Pythagore donne:

$$r = \sqrt{5^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \Delta V \cong \pi(25 - x^2)\Delta x$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 3 m au-dessus du réservoir? On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, et que $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Réponse: $\Delta W \cong (\text{poids de la couche}) \times (\text{hauteur à pomper})$

$$= (9.8 \times 1000 \times \Delta V) \times (x + 3)$$

$$= 9800 \left(\pi(25 - x^2)\Delta x \right) (x + 3) = \boxed{9800\pi(25 - x^2)(x + 3)\Delta x}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau à 3 m au-dessus du réservoir? **Écrire seulement l'intégrale.** Ce n'est pas nécessaire de la calculer.

Réponse: $W = \int_0^5 9800\pi(25 - x^2)(x + 3) dx$

Un câble qui pèse 10 N/m sert à remonter 80 N de minerai du fond d'un puits 100 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, x mètres de câble aient été remontés à la surface. Quel est, en première approximation, le travail requis pour en remonter Δx mètres de plus?

Solution. S'il y a x mètres de câble à la surface, c'est qu'il en pend $100 - x$ mètres. Le poids de ces $100 - x$ mètres de câble est $10(100 - x)$ N. Ajouté au poids du minerai, le poids total est $80 + 10(100 - x) = 1080 - 10x$ N.

Pour en remonter Δx mètres de plus, le travail requis est environ

$$\Delta W \cong (1080 - 10x)\Delta x$$

car, pour Δx petit, le poids de l'ensemble ne varie presque pas lorsqu'on remonte le câble de Δx mètre.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface?

Solution. Lorsqu'on remonte la totalité du câble, la longueur x à la surface passe de 0 m à 100 m. Donc le travail est

$$W = \int_0^{100} (1080 - 10x) dx = 58000 \text{ J}$$

La longueur naturelle d'un ressort est de 10 cm et il faut exercer une force de 12 N pour l'allonger à 25 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force $F(x)$ requise pour étirer le ressort de x mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!

Solution. La loi de Hooke donne $F(x) = kx$ pour une constante k . Lorsqu'on allonge le ressort de 10 cm à 25 cm, il subit un étirement de

$$\frac{25 - 10}{100} = 0.15 \text{ m.}$$

Par hypothèse, on a $12 = k \times 0.15$, par suite $k = 80$ et $F(x) = 80x$.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 10 cm à 25 cm. Attention aux unités!

Solution. L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de 0 m à 0.15 m. Le travail requis est donc

$$\int_0^{0.15} 80x \, dx = 80 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.15} = \boxed{0.9 \text{ J}}.$$

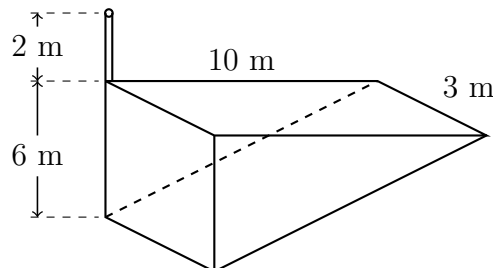
(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 25 cm à 35 cm. Attention aux unités!

Solution. Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de 0.15 m à 0.25 m. Le travail requis est donc

$$\int_{0.15}^{0.25} 80x \, dx = 80 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.15}^{0.25} = \boxed{1.6 \text{ J}}.$$

Le dessin ci-contre montre un réservoir en forme de piscine avec le dessus à l'horizontale, une face verticale et un plancher oblique. Ses dimensions sont données en mètres, et ce réservoir est plein d'eau

On veut pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir.



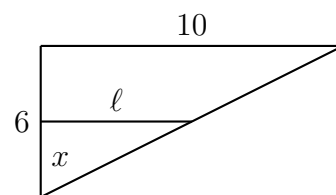
On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur ℓ et de largeur 3 où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre).

On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{10}{6} \implies \ell = \frac{5}{3}x.$$



$$\implies \Delta V \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 3\ell\Delta x = 5x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 , et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Solution. On doit monter la couche de $8 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\ &= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\ &\cong 9800(5x\Delta x)(8 - x) = 49000x(8 - x)\Delta x \end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 2 m au-dessus du réservoir?

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 6$:

$$W = \int_0^6 49000x(8 - x) dx = 49000 \int_0^6 (8x - x^2) dx \cong 3.53 \times 10^6 \text{ Joules J.}$$