

SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION DU 17 MARS À 13H00

1. [6 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-1)^n}{n^2+1}$.

Solution: Le terme général de cette série est $a_n = \frac{3^n(x-1)^n}{n^2+1}$. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{3^{n+1}|x-1|^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{3^n|x-1|^n} \\ &= 3|x-1| \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 3|x-1| \frac{1+1/n^2}{(1+1/n)^2+1/n^2} \rightarrow 3|x-1| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$3|x-1| < 1 \iff -1/3 < x-1 < 1/3 \iff \boxed{2/3 < x < 4/3},$$

et elle diverge **si**

$$3|x-1| > 1 \iff x-1 < -1/3 \text{ ou } x-1 > 1/3 \iff \boxed{x < 2/3 \text{ ou } x > 4/3}.$$

Le centre de la série est $x = 1$ et son rayon de convergence est $\boxed{R = 1/3}$.

- Si $x = 2/3$, la série devient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(-1/3)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

(série de Riemann avec $p = 2 > 1$), cette série est absolument convergente, donc convergente.

- Si $x = 4/3$, la série devient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(1/3)^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

C'est une série à termes positifs convergente en vertu des mêmes calculs.

L'intervalle de convergence de la série est donc $[2/3, 4/3]$.

2. [3 points] Calculez la somme de la série télescopique $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ si elle existe.

- A) $-1/2$ B) $2/3$ C) $7/6$ D) $5/2$ E) $9/2$ F) ∞

Solution: On trouve $\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2((n+2) - (n+1))}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$, donc

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=2}^k \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^k \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} \right) = \sum_{n=2}^k \frac{2}{n+1} - \sum_{n=2}^k \frac{2}{n+2} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{k} + \frac{2}{k+1} \right) - \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \cdots + \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{k+2}, \end{aligned}$$

et par suite $\sum_{n=2}^k \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{2}{3}$.

3. [3 points] Une série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait $0 \leq \frac{2^{3n-2}}{4^n} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$.

Que peut-on dire d'elle?

- A) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{4^n} = \frac{1}{2}$ B) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{4^n} = 4$
 C) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{4^n} = \frac{1}{2}$ D) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{4^n} = 4$
 E) Elle est divergente. F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

Solution: Elle est divergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{4^n} = \infty$ (série géométrique de raison $8/4 = 2 > 1$).

4. [3 points] Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

• Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est divergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. Faux

• Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont bornées. Vrai

• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. Vrai

5. [5 points] Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{20} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n+n^2}$ des 20 premiers termes de la série $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{20} = s - s_{20}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: Comme $n+n^2 \geq n^2$ pour tout $n \geq 1$, on trouve

$$R_{20} = \sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n+n^2} \leq \sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $f(x) = 1/x^2$ est décroissante pour $x > 0$, le test de l'intégrale donne

$$\sum_{n=21}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{20}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x} \right]_{20}^t = \frac{1}{20} = 0.05$$

L'erreur d'approximation est donc au plus 0.05.

6. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n}$.

(i) [2 points] Déterminez une série pour $f'(1)$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: On vérifie facilement que le rayon de convergence de la série $f(x)$ est $R = 4$. En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{nx^n}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{4^n},$$

pour tout x avec $|x| < 4$, donc

$$f'(1) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}}.$$

(ii) [2 points] Déterminez une série pour $\int_0^{1/2} f(x) dx$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{nx^n}{4^n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)4^n},$$

où C désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de f pour $|x| < 4$, c'est-à-dire sur l'intervalle $(-4, 4)$. Donc

$$\int_0^{1/2} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1/2)^{n+1}}{(n+1)4^n} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{3n+1}}}.$$

7 a) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\frac{x}{4-x^2} = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{1-(x^2/4)} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{x}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{64} + \dots$$

si $|x^2/4| < 1$, donc si $|x| < 2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 2}$.

b) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = (4+x^2)^{5/2}$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\begin{aligned} (4+x^2)^{5/2} &= (4(1+(x^2/4)))^{5/2} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5/2}{n} (x^2/4)^n \\ &= 32 + 32(5/2)(x^2/4) + 32 \frac{(5/2)(3/2)}{2} (x^2/4)^2 + \dots \\ &= 32 + 20x^2 + \frac{15}{4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

si $|x^2/4| < 1$, donc si $|x| < 2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 2}$.