

## SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION DU 17 MARS À 13H00

1. [6 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 4}$ .

**Solution:** Le terme général de cette série est  $a_n = \frac{(-1)^n n x^n}{n^2 + 4}$ . On trouve

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{(n+1)^2 + 4} \cdot \frac{n^2 + 4}{n|x|^n} \\ &= |x| \frac{n+4}{n} \cdot \frac{n^2 + 4}{(n+1)^2 + 4} = |x| (1 + (4/n)) \frac{1 + 4/n^2}{(1 + 1/n)^2 + 4/n^2} \rightarrow |x| \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|x| < 1 \iff \boxed{-1 < x < 1},$$

et elle diverge **si**

$$|x| > 1 \iff \boxed{x < -1 \text{ ou } x > 1}.$$

Le centre de la série est  $x = 0$  et son rayon de convergence est  $\boxed{R = 1}$ .

- Si  $x = -1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n}{n^2 + 4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$ .

C'est une série à termes positifs. On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Donc elle est divergente.

- Si  $x = 1$ , la série devient  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ .

C'est une série alternée de terme général  $(-1)^n b_n$  avec  $b_n = f(n)$  où  $f(x) = x/(x^2 + 4)$ .

On a

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} < 0 \text{ pour } x > 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + (4/x)} = 0.$$

Donc la suite  $b_n$  est décroissante pour  $n \geq 2$  et tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors, la série est convergente en vertu du test des séries alternées.

L'intervalle de convergence de la série est donc  $(-1, 1]$ .

2. [3 points] Calculez la somme de la série télescopique  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(n-1)(n+1)}$  si elle existe.

- A)  $-1/2$     B)  $2/3$     C)  $7/6$     D)  $5/2$      E)  $9/2$     F)  $\infty$

**Solution:** On trouve  $\frac{6}{(n-1)(n+1)} = \frac{3((n+1) - (n-1))}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1}$ , donc

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=2}^k \frac{6}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^k \left( \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n+1} \right) = \sum_{n=2}^k \frac{3}{n-1} - \sum_{n=2}^k \frac{3}{n+1} \\ &= \left( \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \cdots + \frac{3}{k-2} + \frac{3}{k-1} \right) - \left( \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{3}{k} + \frac{3}{k+1} \right) \\ &= \frac{3}{1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{k} - \frac{3}{k+1}, \end{aligned}$$

et par suite  $\sum_{n=2}^k \frac{6}{(n-1)(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ .

3. [3 points] Une série à termes positifs  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  satisfait  $0 \leq a_n \leq \frac{2^n 3^n}{5^n}$  pour tout  $n \geq 0$ .  
Que peut-on dire d'elle?

- A) Elle est convergente et  $\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{5^n} = 6$     B) Elle est convergente et  $\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{5^n} = 15$   
 C) Elle est convergente et  $\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{5^n} = 6$     D) Elle est convergente et  $\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{5^n} = 15$   
 E) Elle est divergente.     F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

**Solution:** On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente car  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{5^n} = \infty$  (série géométrique de raison  $6/5 > 1$ ).

4. [3 points] Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

• Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est convergente. Faux

• Si  $0 \leq a_n \leq b_n$  pour tout  $n \geq 0$  et si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est divergente, alors  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  est Vrai  
divergente.

• Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  est convergente. Faux

5. [5 points] En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n)}{n}$  est convergente ou divergente.

**Solution:** Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{2}{n} \leq \frac{3 + \cos(n)}{n} \leq \frac{4}{n}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n)}{n} \geq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

(série harmonique). Donc la série donnée est divergente.

6. On considère la série entière  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 4^n}$ .

(i) [2 points] Déterminez une série pour  $f'(2)$ . Simplifiez et encadrez votre réponse.

**Solution:** On vérifie facilement que le rayon de convergence de la série  $f(x)$  est  $R = 4$ . En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^n}{n 4^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{4^n},$$

pour tout  $x$  avec  $|x| < 4$ , donc

$$f'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}}.$$

Comme il s'agit d'une série géométrique de raison  $1/2$ , on en déduit que  $f'(2) = 1/2$ .

(ii) [2 points] Déterminez une série pour  $\int_0^2 f(x) dx$ . Simplifiez et encadrez votre réponse.

**Solution:** En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{x^n}{n 4^n} dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)4^n},$$

où  $C$  désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de  $f$  pour  $|x| < 4$ , c'est-à-dire sur l'intervalle  $(-4, 4)$ . Donc

$$\int_0^2 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n(n+1)4^n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n-1}}}$$

**7 a)** [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction  $f(x) = \ln((1-x)^3)$ . Quel est son rayon de convergence?

**Solution:** On a

$$\ln((1-x)^3) = 3 \ln(1-x) = -3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -3x - \frac{3x^2}{2} - x^3 + \dots$$

si  $|x| < 1$ . Le rayon de convergence de cette série est  $\boxed{R = 1}$ .

**b)** [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x}}$ . Quel est son rayon de convergence?

**Solution:** On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{9+x}} &= \frac{1}{3} (1 + (x/9))^{-1/2} = \frac{1}{3} \left( 1 + \binom{-1/2}{1} (x/9) + \binom{-1/2}{2} (x/9)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + (-1/2)(x/9) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} (x/9)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{54}x + \frac{1}{648}x^2 + \dots \end{aligned}$$

si  $|x/9| < 1$ , donc si  $|x| < 9$ . Le rayon de convergence de cette série est  $\boxed{R = 9}$ .