Solutions: Examen de mi-session du 17 mars à 8h30

1. [6 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$.

Solution: Le terme général de cette série est $a_n = \dfrac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|2x-1|^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}} \cdot \frac{5^n\sqrt{n}}{2^n|2x-1|^n} \\ &= \frac{|2x-1|}{5}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|2x-1|}{5}\sqrt{\frac{1}{1+(1/n)}} \ \to\ \frac{|2x-1|}{5} \text{ si } n\to\infty.\end{aligned}$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$|2x-1|/5 < 1 \iff |2x-1| < 5 \iff -5 < 2x-1 < 5 \iff \boxed{-2 < x < 3},$$

et elle diverge **si**

$$\begin{aligned}|2x-1|/5 > 1 \iff |2x-1| > 5 &\iff 2x-1 < -5 \text{ ou } 2x-1 > 5 \\ &\iff \boxed{x < -2 \text{ ou } x > 3}.\end{aligned}$$

Le centre de la série est $x = 1/2$ et son rayon de convergence est $\boxed{R = 5/2}$.

- Si $x = -2$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

  C'est une série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/\sqrt{n}$. Comme $b_n \downarrow 0$ lorsque $n\to\infty$ (car $\sqrt{n}\uparrow\infty$), cette série est convergente.

- Si $x = 3$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$.

  Elle est divergente (série de Riemann avec $p = 1/2 \le 1$).

L'intervalle de convergence de la série est donc $[-2, 3)$.

2. [3 points] Calculez la somme de la série télescopique $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ si elle existe.

A) $-1/2$ B) $2/3$ $\boxed{\text{C)}}$ $7/6$ D) $5/2$ E) $9/2$ F) ∞

Solution: On trouve $\dfrac{4}{n(n+2)} = \dfrac{2((n+2)-n)}{n(n+2)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+2}$, donc

$$\begin{aligned}
s_k &= \sum_{n=3}^{k} \frac{4}{n(n+2)} = \sum_{n=3}^{k} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right) = \sum_{n=3}^{k} \frac{2}{n} - \sum_{n=3}^{k} \frac{2}{n+2} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \cdots + \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2},
\end{aligned}$$

et par suite $\displaystyle\sum_{n=3}^{k} \frac{4}{n(n+2)} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{7}{6}.$

3. [3 points] Une série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait $0 \leq \dfrac{2}{2^{2n}} \leq a_n$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire d'elle?

A) Elle est convergente et $\leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = \frac{1}{2}$

B) Elle est convergente et $\leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = \frac{2}{3}$

C) Elle est convergente et $\geq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = \frac{1}{2}$

D) Elle est convergente et $\geq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = \frac{2}{3}$

E) Elle est divergente.

$\boxed{\text{F)}}$ On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

Solution: On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4^n} = \frac{2/4}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$

est convergente.

4. [3 points] Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

- Si la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ satisfait $0 < a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \geq 0$, alors elle est convergente. **Faux**

- La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est convergente car $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. **Faux**

- Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. **Vrai**

5. [5 points] En utilisant un test de comparaison approprié, déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}}$ est convergente ou divergente.

Solution: Le terme général de la série se comporte comme $n^3/\sqrt{n^7} = 1/n^{1/2}$. On s'attend donc à ce que cette série diverge. Pour le montrer, on doit minorer son terme général. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{n^3}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{n^3}{\sqrt{9n^7}} = \frac{1}{3n^{1/2}}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{\sqrt{n^7+8}} \geq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$$

(série de Riemann avec $p = 1/2 \leq 1$). Donc la série donnée est divergente.

6. On considère la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,x^{2n}}{9^n}$.

(i) [2 points] Déterminez une série pour $f'(2)$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: On vérifie facilement que le rayon de convergence de la série $f(x)$ est $R = 3$. En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{n\,x^{2n}}{9^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 x^{2n-1}}{9^n},$$

pour tout x avec $|x| < 3$, donc

$$f'(2) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,4^n}{9^n}}.$$

(ii) [2 points] Déterminez une série pour $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n\,x^{2n}}{9^n}\,\mathrm{d}x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,x^{2n+1}}{(2n+1)9^n},$$

où C désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de f pour $|x| < 3$, c'est-à-dire sur l'intervalle $(-3, 3)$. Donc

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,2^{2n+1}}{(2n+1)9^n}}.$$

7 a) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \cos(2x)$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = \infty}$.

b) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(4x^2+1)^3}$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(4x^2+1)^{-3}} = (1 + (4x^2))^{-3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (4x^2)^n \\ &= 1 + (-3)(4x^2) + \frac{(-3)(-4)}{2}(4x^2)^2 + \cdots \\ &= 1 - 12x^2 + 96x^4 + \cdots\end{aligned}$$

si $|4x^2| < 1$, donc si $|x| < 1/2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 1/2}$.