

1. [6 points] Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+4)}$.

Solution: Le terme général de cette série est $a_n = \frac{(x+2)^n}{3^n(n+4)}$. On trouve

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|^{n+1}}{3^{n+1}(n+5)} \cdot \frac{3^n(n+4)}{|x+2|^n} = \frac{n+4}{n+5} \cdot \frac{|x+2|}{3} = \frac{1+4/n}{1+5/n} \cdot \frac{|x+2|}{3} \rightarrow \frac{|x+2|}{3} \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Donc, en vertu du test du quotient, la série converge **si**

$$\frac{|x+2|}{3} < 1 \iff |x+2| < 3 \iff -3 < x+2 < 3 \iff \boxed{-5 < x < 1},$$

et elle diverge **si**

$$\frac{|x+2|}{3} > 1 \iff |x+2| > 3 \iff x+2 < -3 \text{ ou } x+2 > 3 \iff \boxed{x < -5 \text{ ou } x > 1}.$$

Le centre de la série est $x = -2$ et son rayon de convergence est $\boxed{R = 3}$.

- Si $x = -5$, la série devient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}$.

C'est une série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = 1/(n+4)$. Comme $b_n \downarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (car $n+4 \uparrow \infty$), cette série est convergente.

- Si $x = 1$, la série devient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Elle est divergente (série harmonique).

L'intervalle de convergence de la série est donc $[-5, 1)$.

2. [3 points] Calculez la somme de la série télescopique $\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan(n+2) - \arctan(n))$ si elle existe.

- A) $-\pi/2$ B) $-\pi/3$ C) 0 D) $\pi/4$ E) $\pi/2$ F) $3\pi/4$

Solution: On trouve que les sommes partielles

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=0}^k (\arctan(n+2) - \arctan(n)) = \sum_{n=0}^k \arctan(n+2) - \sum_{n=0}^k \arctan(n) \\ &= (\arctan(2) + \arctan(3) + \cdots + \arctan(k+1) + \arctan(k+2)) \\ &\quad - (\arctan(0) + \arctan(1) + \cdots + \arctan(k-1) + \arctan(k)) \\ &= \arctan(k+1) + \arctan(k+2) - \arctan(0) - \arctan(1) \end{aligned}$$

tendent vers $(\pi/2) + (\pi/2) - 0 - (\pi/4) = 3\pi/4$ lorsque $k \rightarrow \infty$, donc la somme de la série est $3\pi/4$.

3. [3 points] Une série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisfait $0 \leq a_n \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire d'elle?

- A) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$ B) Elle est convergente et $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{3}{2}$
 C) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$ D) Elle est convergente et $\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{3}{2}$
 E) Elle est divergente. F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

Solution: On trouve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)(2/3)^n = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$.

4. [3 points] Pour chaque affirmation, écrire Vrai ou Faux dans la case prévue à cet effet.

• La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est convergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Faux

• Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Vrai

• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente. Faux

5. [5 points] Supposons qu'on ait calculé la somme $s_{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{1+n^4}}$ des 100 premiers termes de la série $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^4}}$. Majorez l'erreur d'approximation $R_{100} = s - s_{100}$, en justifiant clairement votre réponse.

Solution: Comme $\sqrt{1+n^4} \geq \sqrt{n^4} = n^2$ pour tout $n \geq 1$, on trouve

$$R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^4}} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $f(x) = 1/x^2$ est décroissante pour $x > 0$, le test de l'intégrale donne

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x} \right]_{100}^t = \frac{1}{100} = 0.01$$

L'erreur d'approximation est donc au plus 0.01.

6. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n 4^n}$.

(i) [2 points] Déterminez une série pour $f'(1)$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: On vérifie facilement que le rayon de convergence de la série $f(x)$ est $R = 2$. En la dérivant termes à termes, on trouve

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(x-2)^{2n}}{n 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x-2)^{2n-1}}{4^n},$$

pour tout x avec $|x-2| < 2$, donc

$$f'(1) = \boxed{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}}.$$

En observant qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $1/4$, on trouve que $f'(1) = -2/3$.

(ii) [2 points] Déterminez une série pour $\int_0^1 f(x) dx$. Simplifiez et encadrez votre réponse.

Solution: En intégrant termes à termes, on trouve

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(x-2)^{2n}}{n 4^n} dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{n(2n+1)4^n},$$

où C désigne la constante d'intégration. Cette fonction est une primitive de f pour $|x-2| < 2$, c'est-à-dire sur l'intervalle $(0, 4)$. Donc

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n(2n+1)4^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n+1}}{n(2n+1)4^n} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 1}{n(2n+1)4^n}}$$

7 a) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \sin(x^2)$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = \infty}$.

b) [3 points] Donnez les trois premiers termes non nuls du développement en série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. Quel est son rayon de convergence?

Solution: On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+2x}} &= (1 + (2x))^{-1/2} = 1 + \binom{-1/2}{1} (2x) + \binom{-1/2}{2} (2x)^2 + \dots \\ &= 1 + (-1/2)(2x) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} (2x)^2 + \dots \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + \dots \end{aligned}$$

si $|2x| < 1$, donc si $|x| < 1/2$. Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R = 1/2}$.