

SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION 10 FÉVRIER 8H30

1. [5 points] Représentez la région du plan délimitée par les courbes $x = 2y^2$ et $x = 4 + y^2$, puis calculez-en l'aire.

- A) $8/3$ B) $9/2$ C) $17/2$ D) $32/3$ E) $41/2$ F) $64/3$

Solution. On résout

$$2y^2 = 4 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Donc les courbes se coupent aux points $(8, -2)$ et $(8, 2)$.

On décompose la région en bandes horizontales minces d'épaisseur Δx .

frontière gauche : $x = 2y^2$

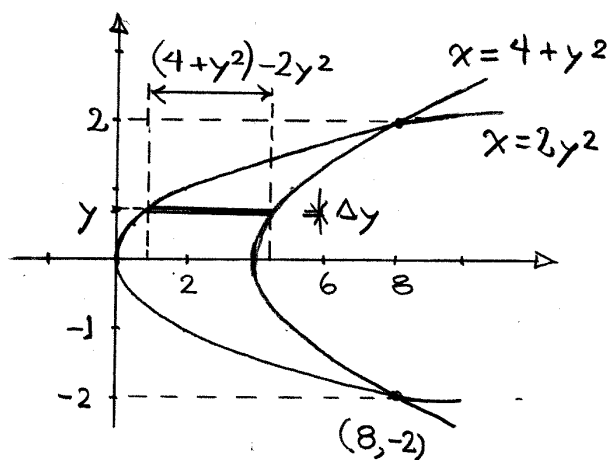
frontière droite : $x = 4 + y^2$

$$(-2 \leq y \leq 2)$$

aire d'une bande pour l'ordonnée $y \cong ((4 + y^2) - 2y^2) \Delta y$

$$\Rightarrow \text{Aire} = \int_{-2}^2 ((4 + y^2) - 2y^2) dy = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy$$

$$= \left[4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^2 = \boxed{\frac{32}{3}}$$



2. [2 points] Une digue verticale est percée à sa base d'une porte qui fait 2 m de hauteur. On note $\ell(x)$ la largeur de la porte à la hauteur x mesurée depuis la base de la porte. Si la digue contient 10 m d'eau, laquelle des intégrales ci-dessous représente la force hydrostatique que l'eau exerce sur cette porte?

- A) $\int_0^2 9800\ell(x) dx$ B) $\int_0^{10} 9800\ell(x) dx$ C) $\int_0^2 9800(8+x)\ell(x) dx$
 D) $\int_0^2 9800(10-x)\ell(x) dx$ E) $\int_0^8 9800(10-x)\ell(x) dx$ F) $\int_0^{10} 9800(8+x)\ell(x) dx$

3. [2 points] Une fonction $f(x)$ est continue sur $(0, 1]$ et satisfait $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ si $0 < x \leq 1$.

Que peut-on dire de $\int_0^1 f(x) dx$?

- A) Elle est convergente et est $\leq \int_0^1 \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2}$
 B) Elle est convergente et est $\leq \int_0^1 \frac{1}{2x^2} dx = 1$
 C) Elle est convergente et est $\geq \int_0^1 \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2}$
 D) Elle est convergente et est $\geq \int_0^1 \frac{1}{2x^2} dx = 1$
 E) Elle est divergente.

F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

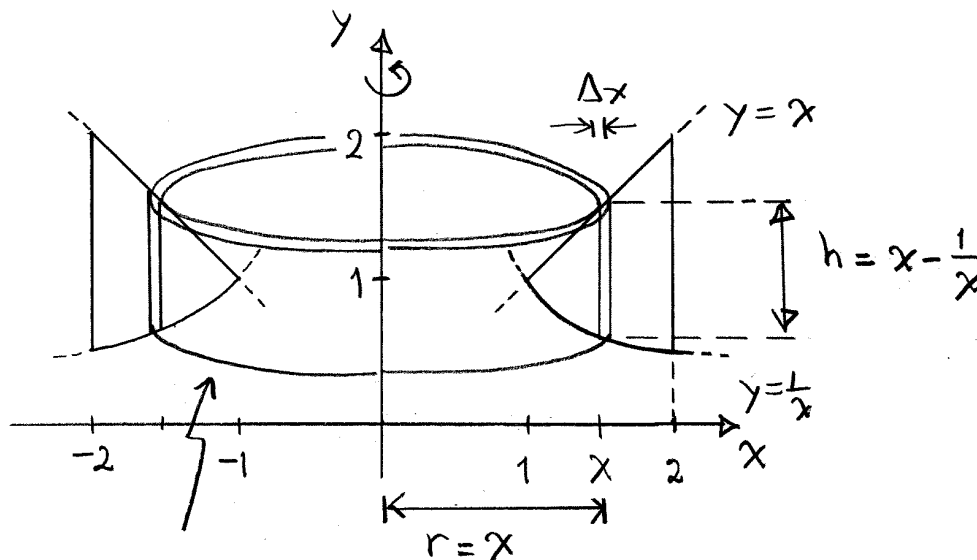
Solution: On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente car $\int_0^1 \frac{1}{2x^2} dx = \infty$.

4. [5 points] On veut calculer le volume du solide de révolution \mathcal{S} obtenu par rotation autour de l'axe des y de la région \mathcal{R} du plan délimitée par les courbes

$$y = x, \quad y = 1/x \quad \text{et} \quad x = 2.$$

On se propose d'utiliser la méthode des cylindres.

(i) Dessinez cette région \mathcal{R} , la trace de \mathcal{S} dans le plan xy , et le cylindre mince obtenu par rotation de la portion verticale de \mathcal{R} comprise entre les abscisses x et $x + \Delta x$ pour x général et Δx petit, avec ses dimensions. Utilisez la présentation apprise en classe et n'oubliez pas d'indiquer les échelles sur les axes de coordonnées.



Cylindre mince

(ii) Quels sont, en première approximation, le rayon r , la hauteur h et le volume ΔV de ce cylindre?

Réponses: $r = x$ $h = x - \frac{1}{x}$

$$\Delta V \cong 2\pi r h \Delta x = 2\pi x \left(x - \frac{1}{x} \right) \Delta x = 2\pi (x^2 - 1) \Delta x$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de \mathcal{S} et calculez-la.

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_1^2 2\pi (x^2 - 1) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{8\pi}{3} \cong 8.378$$

5. [5 points] La longueur naturelle d'un ressort est de 20 cm et il faut exercer une force de 20 N pour l'allonger à 25 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force $F(x)$ requise pour étirer le ressort de x mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!

Solution. La loi de Hooke donne $F(x) = kx$ pour une constante k . Lorsqu'on allonge le ressort de 20 cm à 25 cm, il subit un étirement de

$$\frac{25 - 20}{100} = 0.05 \text{ m.}$$

Par hypothèse, on a $20 = k \times 0.05$, par suite $k = 400$ et $F(x) = 400x$.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 20 cm à 25 cm. Attention aux unités!

Solution. L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de 0 m à 0.05 m. Le travail requis est donc

$$\int_0^{0.05} 400x \, dx = 400 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.05} = \boxed{0.5 \text{ J}}.$$

(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de 25 cm à 35 cm. Attention aux unités!

Solution. Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de 0.05 m à 0.15 m. Le travail requis est donc

$$\int_{0.05}^{0.15} 400x \, dx = 400 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.05}^{0.15} = \boxed{4 \text{ J}}.$$

6. [4 points] À l'aide d'un test de comparaison, déterminez si $\int_1^{\infty} \frac{x \cos^2(x)}{e^x + 1} dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

$$\text{On a } \frac{x \cos^2(x)}{e^x + 1} \leq \frac{x}{e^x + 1} \leq \frac{x}{e^x} \text{ pour tout } x \geq 0,$$

$$\text{donc } \int_1^{\infty} \frac{x \cos^2(x)}{e^x + 1} dx \leq \int_1^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{dv} dx &= \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{v} \underbrace{dx}_{du} && \text{(intégration par parties)} \\ &= -x e^{-x} - e^{-x}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\int_1^{\infty} \frac{x \cos^2(x)}{e^x + 1} dx \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[(-b e^{-b} - e^{-b}) - (-e^{-1} - e^{-1}) \right] = \frac{2}{e}$$

Donc l'intégrale converge et est $\leq \frac{2}{e} \approx 0.7358$

7. [2 points] Une citerne est remplie initialement de 500 L de saumure contenant 30 kg de sel dissous. Une autre saumure qui contient 0.3 kg/L de sel y est déversée à raison de 10 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au même taux de sorte que son volume total ne change pas. Soit $Q(t)$ la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps t (en minutes). Établissez une équation différentielle pour $Q(t)$.

A. $\frac{dQ}{dt} = 1 - \frac{Q}{250}$ B. $\frac{dQ}{dt} = 2 - \frac{Q}{250}$ C. $\frac{dQ}{dt} = 3 - \frac{Q}{250}$
 D. $\frac{dQ}{dt} = 1 - \frac{Q}{50}$ E. $\frac{dQ}{dt} = 2 - \frac{Q}{50}$ **F.** $\frac{dQ}{dt} = 3 - \frac{Q}{50}$

Solution. $\frac{dQ}{dt} = (\text{taux de sel entrant}) - (\text{taux de sel sortant})$
 $= (\text{débit} \times \text{concentration entrante}) - (\text{débit} \times \text{concentration sortante})$
 $= (10 \times 0.3) - \left(10 \times \frac{Q}{500}\right)$
 $= 3 - \frac{Q}{50}.$

8. [5 points] Résoudre le problème à valeur initiale : $xy^2y' = x + 1$, $y(1) = 3$.

Solution:

$$xy^2 \frac{dy}{dx} = x + 1 \implies \int y^2 dy = \int \frac{x+1}{x} dx \implies \frac{1}{3}y^3 = x + \ln|x| + C.$$

Comme $y(1) = 3$, on a $9 = 1 + C$, donc $C = 8$ et par suite $y = (3x + 3\ln(x) + 24)^{1/3}$.