

SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION 10 FÉVRIER 8H30

1. [5 points] Représentez la région du plan délimitée par les courbes $y = (x-2)^2$ et $y = x$, puis calculez-en l'aire.

- A) $8/3$ **B) $9/2$** C) $17/2$ D) $32/3$ E) $41/2$ F) $64/3$

Solution.

On résout

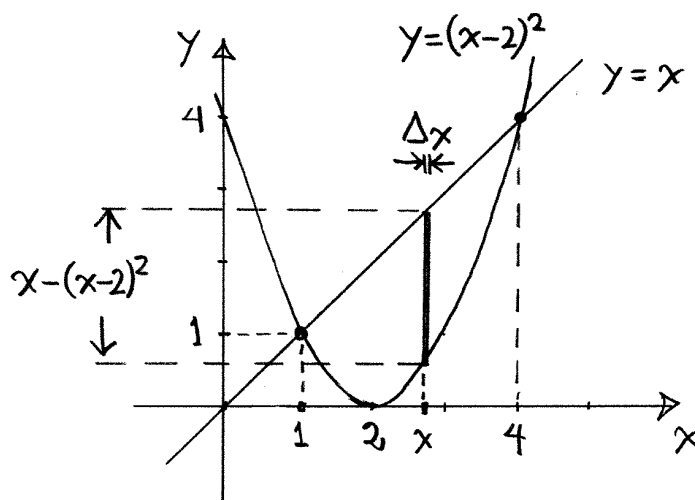
$$(x-2)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 4$$



Donc les courbes se coupent aux points $(1,1)$ et $(4,4)$.

On décompose la région en bandes verticales minces:

frontière supérieure : $y = x$

frontière inférieure : $y = (x-2)^2$ ($1 \leq x \leq 4$)

\Rightarrow aire d'une bande pour l'abscisse $x \cong (x - (x-2)^2) \Delta x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Aire} &= \int_1^4 (x - (x-2)^2) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 = \boxed{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

2. [2 points] Un réservoir mesure 5 m de haut. On note $A(x)$ l'aire de sa section horizontale à la hauteur x mesurée depuis le fond du réservoir. Si le réservoir contient 3 m d'eau, laquelle des intégrales ci-dessous représente le travail requis pour pomper toute cette eau au sommet du réservoir?

A) $\int_0^3 9800(3-x)A(x) dx$ B) $\int_0^3 9800(5-x)A(x) dx$ C) $\int_0^3 9800(7-x)A(x) dx$

D) $\int_0^5 9800(3-x)A(x) dx$ E) $\int_0^5 9800(5-x)A(x) dx$ F) $\int_0^7 9800(7-x)A(x) dx$

3. [2 points] Une fonction $f(x)$ est continue sur $(0, 1]$ et satisfait $0 \leq \frac{1}{x^{5/3}} \leq f(x)$ si $0 < x \leq 1$. Que peut-on dire de $\int_0^1 f(x) dx$?

A) Elle est convergente et est $\leq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx = \frac{3}{4}$

B) Elle est convergente et est $\leq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx = \frac{3}{2}$

C) Elle est convergente et est $\geq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx = \frac{3}{4}$

D) Elle est convergente et est $\geq \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx = \frac{3}{2}$

E) Elle est divergente.

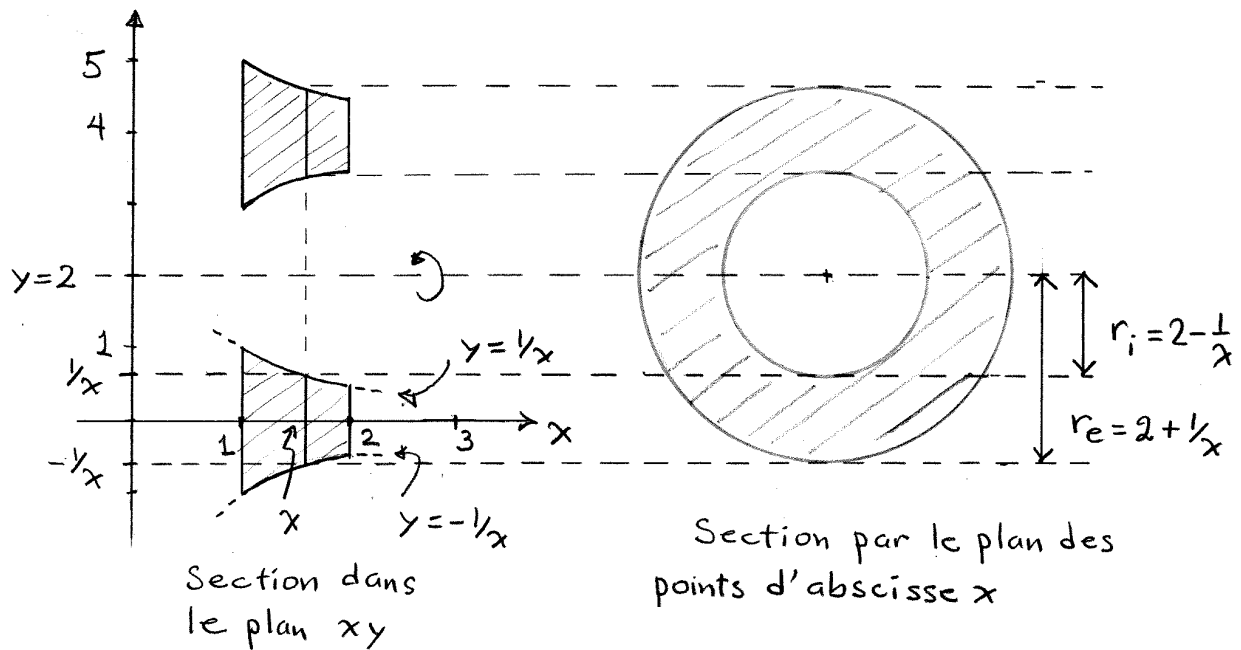
F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

Solution: Elle est divergente car $\int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} dx = \infty$.

4. [5 points] On veut calculer le volume du solide de révolution \mathcal{S} obtenu par rotation autour de la droite horizontale $y = 2$ de la région \mathcal{R} du plan délimitée par les courbes

$$y = -1/x, \quad y = 1/x, \quad x = 1 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

(i) Dessinez cette région \mathcal{R} , la trace de \mathcal{S} dans le plan xy , et l'anneau de section du solide \mathcal{S} par le plan des points d'abscisse x générale, avec ses dimensions. Utilisez la présentation apprise en classe et n'oubliez pas les échelles sur les axes de coordonnées.



(ii) Quels sont le rayon intérieur r_i , le rayon extérieur r_e et l'aire $A(x)$ de cet anneau?

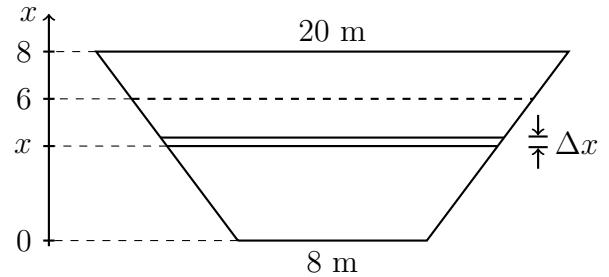
Réponses: $r_i = 2 - \frac{1}{x}$ $r_e = 2 + \frac{1}{x}$

$$A(x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi \left(\left(2 + \frac{1}{x} \right)^2 - \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2 \right) = \frac{8\pi}{x}$$

(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de \mathcal{S} et calculez-la.

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_1^2 A(x) dx = \int_1^2 \frac{8\pi}{x} dx = \left[8\pi \ln(x) \right]_1^2 = 8\pi \ln(2) \cong 17.42$$

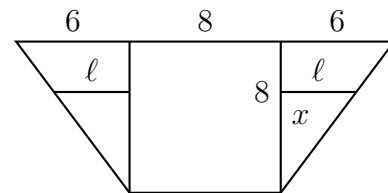
5. [5 points] La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze isocèle comme sur la figure ci-contre. Sa largeur à la base est de 8 m, sa largeur au sommet est de 20 m, sa hauteur est de 8 m, et elle retient 6 m d'eau. On désigne par x la hauteur en mètres mesurée à partir de la base de la digue.



(i) Quelle est, en première approximation, la surface ΔA de la portion de digue comprise entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ pour Δx petit?

Solution: $\Delta A \cong (8 + 2\ell)\Delta x$ où ℓ est comme sur le dessin ci-contre. La loi des triangles semblables donne

$$\frac{\ell}{x} = \frac{6}{8} \implies \ell = \frac{3}{4}x \implies \Delta A \cong \left(8 + \frac{3}{2}x\right) \Delta x$$



(ii) Quelle est, en première approximation, la force hydrostatique ΔF qui s'exerce sur cette même portion de digue? On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que $g \cong 9.8 \text{ m/s}^2$.

Réponse: $\Delta F = (\text{pression hydrostatique}) \times (\text{surface})$
 $\cong (1000 \times g \times \text{profondeur}) \times \Delta A$
 $\cong 9800(6 - x) \left(8 + \frac{3}{2}x\right) \Delta x.$

(iii) Écrivez l'intégrale qui représente la force hydrostatique totale sur la digue. Il n'est pas nécessaire de calculer sa valeur.

Réponse: C'est $F = \int_0^6 9800(6 - x) \left(8 + \frac{3}{2}x\right) dx$

6. [4 points] Déterminez si l'intégrale impropre $\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez sa valeur exacte.

Solution: En posant $u = 8-x$, on trouve $du = -dx$, $x = 8-u$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx &= \int \frac{8-u}{u^{2/3}} (-du) = -8 \int u^{-2/3} du + \int u^{1/3} du \\ &= -24 u^{1/3} + \frac{3}{4} u^{4/3} + C \\ &= -24 (8-x)^{1/3} + \frac{3}{4} (8-x)^{4/3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 8^-} \int_0^t \frac{x}{(8-x)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 8^-} \left((-24(8-t)^{1/3} + \frac{3}{4}(8-t)^{4/3}) - (-24 \cdot 8^{1/3} + \frac{3}{4} \cdot 8^{4/3}) \right) \\ &= 24 \times 2 - \frac{3}{4} \times 16 = \boxed{36} \quad \text{L'intégrale est convergente.} \end{aligned}$$

7. [2 points] En appliquant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.5$, estimez $y(4)$ où y est la solution du problème de Cauchy $y' = x^2 - y$, $y(3) = 7$.

- A) 9.25 B) 9.625 C) 9.75 D) 10.005 E) 10.125 F) 10.25

$$x_0 = 3, \quad y_0 = y(3) = 7$$

$$\begin{aligned} x_1 = 3.5, \quad y(3.5) &\cong y_1 = y_0 + (x_0^2 - y_0) \times 0.5 \\ &= 7 + (3^2 - 7) \times 0.5 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = 4, \quad y(4) &\cong y_2 + (x_1^2 - y_1) \times 0.5 \\ &= 8 + (3.5^2 - 8) \times 0.5 = 10.125 \end{aligned}$$

8. [5 points] Résoudre le problème à valeur initiale $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$

Solution: En séparant les variables, on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} &\implies \ln |y| = \ln |x| + C \\ &\implies |y| = e^{\ln |x| + C} = e^C |x| \\ &\implies y = Ax \quad \text{avec } A = \pm e^C. \end{aligned}$$

Comme $y(1) = 2$, on en déduit que $2 = A$, donc .