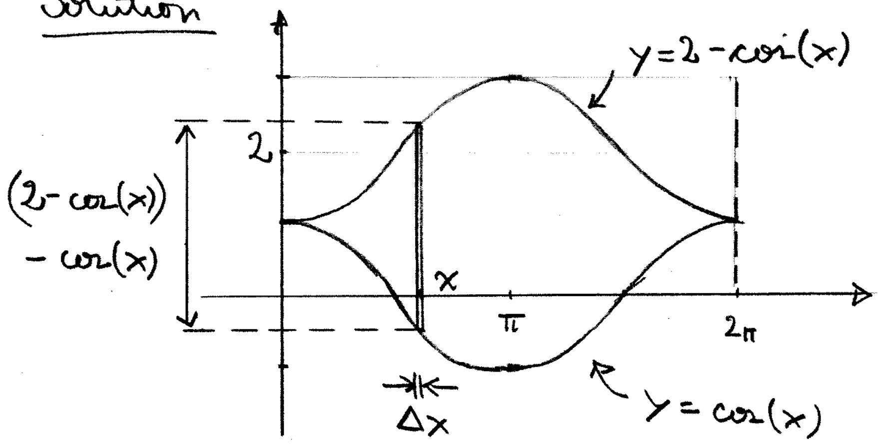
SOLUTIONS: EXAMEN DE MI-SESSION 10 FÉVRIER 8H30

1. [5 points] Représentez la région du plan délimitée par les courbes $y = \cos(x)$ et $y = 2 - \cos(x)$ avec $0 \leq x \leq 2\pi$, puis calculez-en l'aire.

A) $3/2$ B) $\pi/2$ C) 6 D) 2π E) 12 $\boxed{\text{F)}}$ 4π

<u>Solution</u>



On découpe la région en bandes verticales minces d'épaisseur Δx:

frontière inférieure : $y = \cos(x)$

frontière supérieure : $y = 2 - \cos(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$

$\Rightarrow$ aire d'une bande pour l'abscisse $x \cong (2 - \cos(x)) - \cos(x)$

$$\Rightarrow \text{Aire} = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(x))\,dx = \Big[2 - 2\sin(x)\Big|_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}$$

2. [2 points] Un réservoir mesure 7 m de haut. On note $A(x)$ l'aire de sa section horizontale à la hauteur x mesurée depuis le fond du réservoir. Si le réservoir contient 3 m d'eau, laquelle des intégrales ci-dessous représente le travail requis pour pomper toute cette eau au sommet du réservoir?

A) $\int_0^3 9800(3-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ B) $\int_0^3 9800(5-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ $\boxed{\text{C)}}$ $\int_0^3 9800(7-x)A(x)\,\mathrm{d}x$

D) $\int_0^5 9800(3-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ E) $\int_0^5 9800(5-x)A(x)\,\mathrm{d}x$ F) $\int_0^7 9800(7-x)A(x)\,\mathrm{d}x$

3. [2 points] Une fonction $f(x)$ est continue sur $[1,\infty)$ et satisfait $0 \leq \frac{1}{x^{1/3}} \leq f(x)$ pour tout $x \geq 1$. Que peut-on dire de $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$?

A) Elle est convergente et est $\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$

B) Elle est convergente et est $\leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = 3$

C) Elle est convergente et est $\geq \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$

D) Elle est convergente et est $\geq \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = 3$

$\boxed{\text{E)}}$ Elle est divergente.

F) On ne peut pas dire si elle est convergente ou divergente.

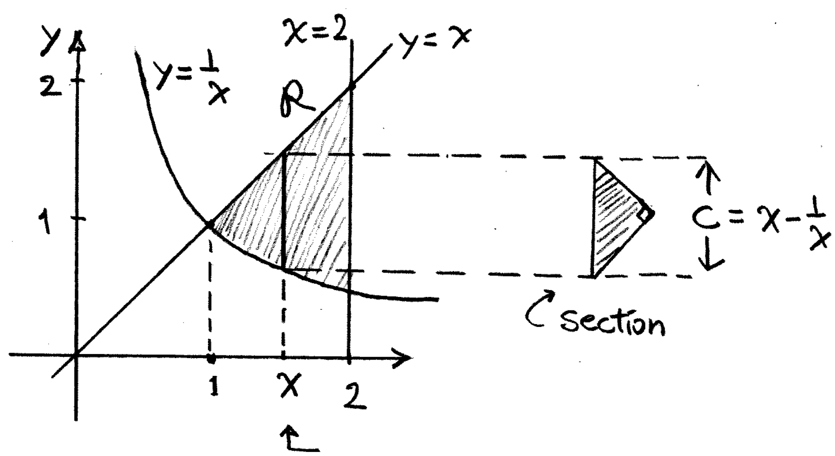
Solution: Elle est divergente car $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \infty$.

4. [5 points] Déterminez le volume du solide $\mathcal{S}$ à fond plat dont la base est la région $\mathcal{R}$ du plan xy délimitée par les courbes

$$y = 1/x, \quad y = x \quad \text{et} \quad x = 2,$$

et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des triangles isocèles rectangles dont l'hypothénuse repose dans le plan xy.

(i) Dessinez la base de ce solide dans le plan xy ainsi que sa section par le plan des points d'abscisse x générale, avec ses dimensions. Utilisez la présentation apprise en classe et n'oubliez pas les échelles sur les axes de coordonnées.



(ii) Quels sont l'hypothénuse c et l'aire $A(x)$ de cette section triangulaire?

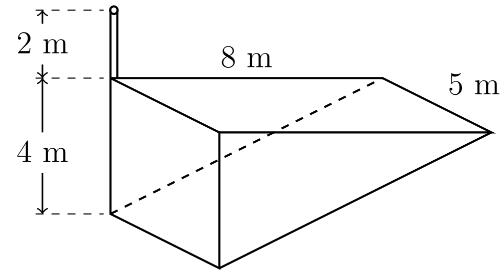
Réponses: $c = x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad A(x) = \dfrac{1}{2}(\text{base})(\text{hauteur}) = \dfrac{1}{4}c^2 = \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$

(iii) Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{S}) = \int_1^2 A(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right|_1^2 = \frac{5}{24} \cong 0.2083 \end{aligned}$$

5. [5 points] Le dessin ci-contre montre un réservoir en forme de piscine avec le dessus à l'horizontale, une face verticale et un plancher oblique. Ses dimensions sont données en mètres, et ce réservoir est plein d'eau

On veut pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir.

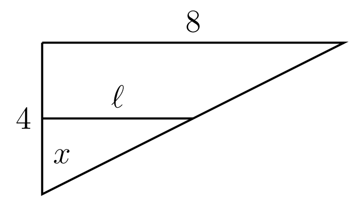


On note x la hauteur en mètres mesurée **à partir du fond du réservoir**.

a) Quel est, en première approximation, le volume ΔV d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$?

Solution. Une section horizontale du réservoir à la hauteur x est un rectangle de longueur ℓ et de largeur 5 où ℓ est donné par la règle des triangles semblables (voir la figure ci-contre). On trouve

$$\frac{\ell}{x} = \frac{8}{4} \quad \Longrightarrow \quad \ell = 2x.$$



$$\Longrightarrow \quad \Delta V \cong (\text{aire du rectangle}) \times \Delta x = 5\ell\Delta x = 10x\Delta x.$$

(b) Quel est, en première approximation, le travail ΔW requis pour pomper cette mince couche d'eau à 2 m au-dessus du réservoir. On rappelle que la densité de l'eau est de 1000 kg/m^3, et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est $g \cong 9.8$ m/s^2.

Solution. On doit monter la couche de $6 - x$ mètres. Le travail requis est donc

$$\begin{aligned}
\Delta W &= (\text{poids}) \times (\text{distance}) \\
&= 1000g(\text{volume}) \times (\text{distance}) \\
&\cong 9800\,(10x\Delta x)\,(6 - x) = 98000x(6 - x)\Delta x
\end{aligned}$$

(c) Quel est, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau du réservoir à 2 m au-dessus du réservoir?

Solution. Comme le réservoir est plein d'eau, on doit intégrer de $x = 0$ à $x = 4$:

$$W = \int_0^4 98000x(6 - x)\,\mathrm{d}x = 98000 \int_0^4 (6x - x^2)\,\mathrm{d}x \cong 2.61 \times 10^6 \text{ Joules J.}$$

6. [4 points] Déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+3x^2}$ est convergente ou divergente en utilisant un test de comparaison approprié. Si elle est convergente, donnez une majoration de sa valeur.

Solution. Pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \leq x^2$, donc

$$3x^2 \leq \sqrt{x} + 3x^2 \leq 4x^2$$

puis

$$\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \frac{1}{3x^2}$$

et par suite

$$\frac{1}{4} = \int_1^\infty \frac{dx}{4x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+3x^2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

En particulier l'intégrale est convergente et elle vaut au plus 1/3.

7. [2 points] En appliquant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.5$, estimez $y(3)$ où y est la solution du problème de Cauchy $y' = 2x^2 - y$, $y(2) = 6$.

A) 9.25 B) 9.625 $\boxed{\text{C)}}$ 9.75 D) 10.005 E) 10.125 F) 10.25

$x_0 = 2$, $y(2) = y_0 = 6$

$x_1 = 2.5$, $y(2.5) \cong y_1 = y_0 + (2x_0^2 - y_0) \times 0.5$

$= 6 + (2 \times 2^2 - 6) \times 0.5 = 7$

$x_2 = 3.0$, $y(3) \cong y_2 = y_1 + (2x_1^2 - y_1) \times 0.5$

$= 7 + (2 \cdot (2.5)^2 - 7) \times 0.5 = \boxed{9.75}$

8. [5 points] Résoudre le problème à valeur initiale $\dfrac{dy}{dx} = y(4x+1)\,,\ y(0) = 2.$

Solution: En séparant les variables, on trouve

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int (4x+1)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = 2x^2 + x + C\,,$$
$$\Longrightarrow \quad y = \pm e^{2x^2+x+C} = Ae^{2x^2+x} \text{ où } A = \pm e^C.$$

Comme $y(1) = 2$, on a $2 = Ae^0 = A$, donc $\boxed{y = 2e^{2x^2+x}}$.