



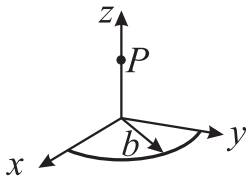
PHY2723 Electricité et magnétisme, hiver 2013

Examen final

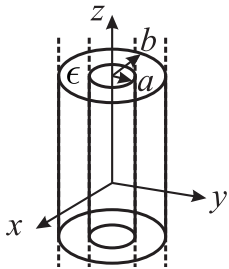
Mardi 23 avril 9 h 30. Professeur : Christian Gigault. Durée : 3 heures. Répondez à toutes les questions dans autant de livrets que vous voulez, tous les problèmes ont la même valeur. L'examen est à livre fermé, vous avez droit à deux feuilles format « lettre » recto-verso. Calculatrice non-graphique, non-programmable permise. (Nombre de pages : 4)

Sauf indication contraire, les situations des problèmes sont dans le vide, prenez $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

1. Quel est le champ électrique en un point le long de l'axe des z créé par un fil portant densité de charge ρ_l ayant la forme d'un quart de cercle de rayon b , (voir ci-dessous) ?

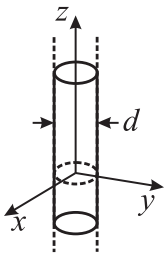


2. On a le potentiel électrique $V(r, \theta, \phi) = k \sin \theta \cos \phi e^{-br}$ où k et b sont des constantes positives.
- Quel est le champ électrique donné par ce potentiel ?
 - Quelle est la densité de charge présente ?
3. On a le champ électrique statique $\vec{E} = k(yz\vec{a}_x + xz\vec{a}_y + xy\vec{a}_z)$, où k est une constante.
- Quel est le travail fait quand une charge q va du point $A(1,0,0)$ à $B(0,1,0)$ en allant en ligne droite de A à l'origine, puis de l'origine à B ?
 - Ce champ électrique est-il un champ statique valide ?
4. On a un volume sphérique de rayon a rempli d'une densité de charge $\rho_v = k/r$ où k est une constante positive.
- Quel est le champ électrique dans tout l'espace ?
 - Quel travail a-t-il fallu dépenser pour assembler cette distribution de charges ?
5. Un conducteur cylindrique de rayon a et longueur infinie portant densité de charge ρ_s est entouré par un matériel diélectrique de constante diélectrique ϵ et rayon externe b , et le tout est dans le vide.
- Quels sont \vec{E} , \vec{D} et \vec{P} partout dans l'espace ?
 - Quels sont les densités de charge captives (*i. e.* liées) ?

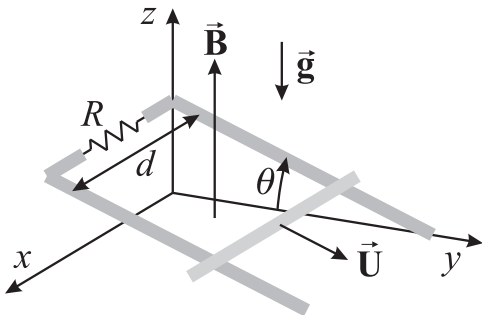


6. On a un très très long fil métallique ($1/\sigma = 2,83 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) de diamètre 2 mm portant un courant de 10 A.
- Quelle est la densité de courant dans le fil, qu'on suppose uniforme et en direction $+z$?
 - Quel est le champ électrique à l'intérieur du fil ?
 - Quelle est la résistance par unité de longueur du fil ?
 - Quelle est la puissance dissipée par unité de longueur du fil ? (Approx. 0,901 W/m)
 - À l'aide de la loi d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$, quelle est la valeur et direction du champ magnétique à la surface du fil (où $\rho = 1 \text{ mm}$) ?
 - Calculez le vecteur $\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ à la surface du fil (ce vecteur est nommé *vecteur de Poynting*).
 - Montrez, en prenant une longueur de fil de 1 m, que le flux de \vec{S} traversant la surface du fil (où $\rho = 1 \text{ mm}$) est égale en grandeur à la puissance dissipée par le fil :

$$\Phi_S \equiv \iint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} = -P.$$



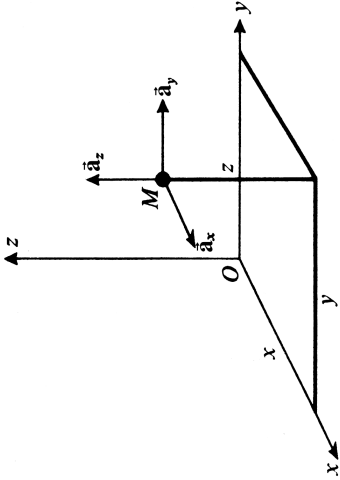
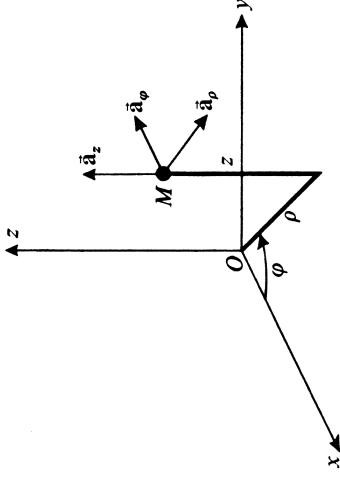
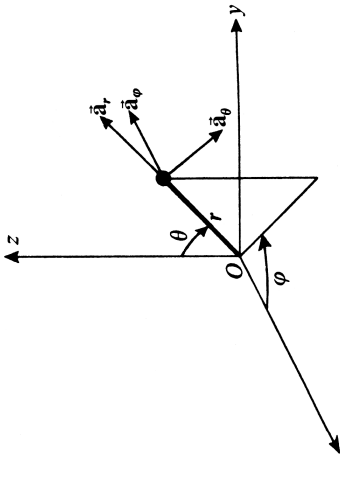
7. Une barre métallique de masse 50 g glisse sans friction sur un circuit métallique de largeur $d = 10 \text{ cm}$ incliné d'un angle de 36.87° par rapport à l'horizontale. La résistance des parties métalliques est négligeable devant la résistance $R = 10 \Omega$. Le tout est dans un champ magnétique orienté selon l'axe des z de valeur 10 T. L'accélération gravitationnelle est $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ et la barre est à $y = 0$ à $t = 0$.
- Si on suppose que la barre glisse à vitesse U , quel est le courant induit dans le circuit et dans quelle direction ?
 - Quelle est la puissance dissipée par la résistance ?
 - Quelle est la puissance venant de la gravité ? À l'aide de ce résultat et de celui de la partie (b), à quelle vitesse U la barre descend-elle ? (Approx 4.6 m/s)



$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= q\vec{E} & \vec{E} &= -\nabla V & \vec{D} &= \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E} & \vec{E} &= \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \epsilon_0 &\equiv 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{m}^{-2}\text{N}^{-1} \\
 \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dq & V &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dq & U &= qV & dq &= \rho_l dl' \text{ ou } \rho_s ds' \text{ ou } \rho_v dv' & \vec{E} &= -\nabla V \\
 \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_v & \iint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} &= Q & \nabla \times \vec{E} &= 0 \text{ (statique)} & \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 & V_2 - V_1 &= -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} & V &= \frac{q}{4\pi\epsilon|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
 \text{Conducteurs : } E_n &= \frac{\rho_s}{\epsilon} & \vec{E}_t &= 0 & \rho_v &= 0 & \vec{E} &= 0 & \text{Diélectriques : } \vec{E}_{1t} &= \vec{E}_{2t} & D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \\
 \rho_{sb} &= \vec{P} \cdot \vec{a}_n & \rho_{vb} &= -\nabla \cdot \vec{P} & C &\equiv Q_a/V_{ab} & W &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k & W &= \frac{1}{2} \iiint_v \rho_v V dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{2} CV^2 \\
 \vec{J} &= \rho_v \vec{U} = \sigma \vec{E} & \sigma &= Neu_e & I &= \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} & P &= \vec{F} \cdot \vec{U} & \text{Dissipée : } P &= \iiint_v \vec{E} \cdot \vec{J} dv = VI \\
 \nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt} &= 0 & \rho_v &= \rho_{v0} e^{-t/\tau} & \tau &= \epsilon/\sigma & J_{n1} &= J_{n2} & \sigma_2 J_{t1} &= \sigma_1 J_{t2} & R &= \Delta V/I \\
 \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) & \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_c \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \Phi &= \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} & \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu I & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\
 \vec{m} &= I\vec{s} & B_{1n} &= B_{2n} & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1t} &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2t} \\
 W &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{univers}} \left(\epsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}|^2 \right) dv & d\vec{F} &= I d\vec{l} \times \vec{B} & \vec{T} &= \vec{m} \times \vec{B} & e_m &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi \\
 \mu_0 &\equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 & c &= 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299792458 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} &= \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \\
 \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\
 \nabla(\psi V) &= \psi \nabla V + V \nabla \psi \\
 \nabla \cdot (\psi \vec{A}) &= \psi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \psi \\
 \nabla \times (\psi \vec{A}) &= \psi \nabla \times \vec{A} + \nabla \psi \times \vec{A} \\
 \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\
 \nabla \cdot \nabla V &= \nabla^2 V \\
 \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\
 \nabla \times \nabla V &= 0 \\
 \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \\
 \int_v \nabla \cdot \vec{A} dv &= \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \text{(Divergence theorem)} \\
 \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{(Stokes's theorem)}
 \end{aligned}$$

Differential elements	Coordinate system		
	Rectangular (Cartesian)	Cylindrical	Spherical
Length $d\vec{\ell}$	$dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y + dz \vec{a}_z$	$d\rho \vec{a}_\rho + \rho d\phi \vec{a}_\phi + dz \vec{a}_z$	$dr \vec{a}_r + r d\theta \vec{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{a}_\phi$
Surface $d\vec{s}$	$dy dz \vec{a}_x + dx dz \vec{a}_y + dx dy \vec{a}_z$	$\rho d\phi dz \vec{a}_\rho + d\rho dz \vec{a}_\phi + \rho d\rho d\phi \vec{a}_z$	$r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{a}_r + r dr \sin\theta d\phi \vec{a}_\theta + r dr d\theta \vec{a}_\phi$
Volume dv	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$

<p style="text-align: center;">Cartésiennes</p> 	<p style="text-align: center;">Cylindriques</p> 	<p style="text-align: center;">Sphériques</p> 
$U = U(x, y, z)$ $\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$ $A_x = A_x(x, y, z)$ $A_y = A_y(x, y, z)$ $A_z = A_z(x, y, z)$	$U = U(\rho, \varphi, z)$ $\vec{A} = A_\rho \vec{a}_\rho + A_\varphi \vec{a}_\varphi + A_z \vec{a}_z$ $A_\rho = A_\rho(\rho, \varphi, z)$ $A_\varphi = A_\varphi(\rho, \varphi, z)$ $A_z = A_z(\rho, \varphi, z)$	$U = U(r, \theta, \varphi)$ $\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\theta \vec{a}_\theta + A_\varphi \vec{a}_\varphi$ $A_r = A_r(r, \theta, \varphi)$ $A_\theta = A_\theta(r, \theta, \varphi)$ $A_\varphi = A_\varphi(r, \theta, \varphi)$
$\nabla U = (\partial U / \partial x) \vec{a}_x + (\partial U / \partial y) \vec{a}_y + (\partial U / \partial z) \vec{a}_z$	$(\nabla U)_\rho = \partial U / \partial \rho$ $(\nabla U)_\varphi = [\partial U / \partial \varphi] / \rho$ $(\nabla U)_z = \partial U / \partial z$	$(\nabla U)_r = \partial U / \partial r$ $(\nabla U)_\theta = [\partial U / \partial \theta] / r$ $(\nabla U)_\varphi = [\partial U / \partial \varphi] / (r \sin \theta)$
$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$
$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\nabla \times \vec{A} = (\partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z) \vec{a}_x + (\partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x) \vec{a}_y + (\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y) \vec{a}_z$	$(\nabla \times \vec{A})_\rho = (\partial A_z / \partial \varphi) / \rho - \partial A_\varphi / \partial z$ $(\nabla \times \vec{A})_\varphi = \partial A_\rho / \partial z - \partial A_z / \partial \rho$ $(\nabla \times \vec{A})_z = [\partial(\rho A_\varphi) / \partial \rho - \partial A_\rho / \partial \varphi] / \rho$	$(\nabla \times \vec{A})_r = [\partial(\sin \theta A_\varphi) / \partial \theta - \partial A_\theta / \partial \varphi] / (r \sin \theta)$ $(\nabla \times \vec{A})_\theta = [\partial A_r / \partial \varphi - \sin \theta \partial(r A_\varphi) / \partial r] / (r \sin \theta)$ $(\nabla \times \vec{A})_\varphi = [\partial(r A_\theta) / \partial r - \partial A_r / \partial \theta] / r$