

**Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 D)**  
**EXAMEN PARTIEL PRATIQUE IV. (Hiver 2016)**  
**Professeur: Joseph Khoury** **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solutions

Prénom: \_\_\_\_\_

Numéro d'étudiant: \_\_\_\_\_

**Aucune note n'est permise.**  
**Les calculatrices non programmables sont permises.**

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 26 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 8 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages et les pages additionnelles si vous manquez d'espace au recto.

1. Parmi les ensembles suivants, un seul est une base de l'espace  $\mathbb{P}_3$  de tous les polynômes de degré au plus 3.

- A.  $\{1, 1 - x^2 + x^3, 3 - 2x^2 + 2x^3, x^3\}$  Non vecteurs linéairement dépendants  
 B.  $\{1 + x + x^2 + x^3\}$  Non un seul vecteur  
 C.  $\{1, 1 + x, 1 + x^2, x + x^2 + x^3\}$  Oui 4 vecteurs linéairement indépendants.  
 D.  $\{1, 1 + x + x^3, 1 + x^2 + x^3, 3 + x + x^2 + 2x^3\}$  Non vecteurs l. dép.  
 E.  $\{x + x^3, 1 + x^3\}$  Non seulement deux vecteurs  
 F.  $\{1, 1 + x, 1 + x^2, x + x^2, 1 - x^3\}$  Non Contient 5 vecteurs

$\dim \mathbb{P}_3 = 4$ . Chaque base de  $\mathbb{P}_3$  doit contenir 4 polynômes lin. indépendants.

A) N'est pas une base  $3 - 2x^2 + 2x^3 = 1 \cdot (1) + 2(1 - x^2 + x^3)$

B) N'est pas une base Contient un seul vecteur

C) C'est une base  $a(1) + b(1+x) + c(1+x^2) + d(x+x^2+x^3) = 0 \Rightarrow a+b=0, b+d=0, c+d=0, d=0$   
 On conclut que  $a=b=c=d=0$ . Les vecteurs sont l. ind. Comme l'ensemble contient 4 vecteurs et  $\dim \mathbb{P}_3 = 4$ , c'est une base de  $\mathbb{P}_3$ .

D) N'est pas une base  $3 + x + x^2 + 2x^3 = 1 \cdot (1) + 1 \cdot (1+x+x^3) + 1 \cdot (1+x^2+x^3)$

E) N'est pas une base Contient seulement deux vecteurs

F) N'est pas une base Contient 5 vecteurs

2. Considérer les trois fonctions  $f, g$  et  $h$  de l'espace  $\mathbb{F} ]-2, +\infty[ , \mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = \frac{x}{(x+2)(x^2+1)}, \quad h(x) = \frac{\alpha x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+1)}$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$ , la fonction  $h$  appartient-elle à l'enveloppe linéaire des fonctions  $f$  et  $g$ ?

- A. 0  
 B. 5  
 C. 2  
 D. 1  
 E. N'importe quelle valeur de  $\alpha$   
 F. 3

On veut trouver deux constantes  $a, b$  telles que  $h(x) = a f(x) + b g(x)$  pour tout  $x \in ]-2, +\infty[$ :

$$\frac{\alpha x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+1)} = a \frac{1}{x+2} + b \frac{x}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1) + bx}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{\alpha x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+1)}$$

Alors  $\alpha x^2 + 6x + 2 = a x^2 + b x + a \Rightarrow \alpha = a, b = 6, a = 2$ . Alors  $\alpha = 2$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$ , les vecteurs

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ m \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^4$ ?

- A.  $m \neq 1$
- B. Aucune des autres réponses
- C.  $m = 0$
- D.  $m = -1$
- E.  $m \neq -1$
- F.  $m = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & m & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1+L_2+L_2 \\ -2L_1+L_3 \rightarrow L_3 \\ t) L_1+L_2 \rightarrow L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_3 \leftrightarrow L_4 \\ \frac{1}{6}L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m-1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

des vecteurs sont linéairement indépendants si le système homogène  $AX=0$  admet une solution unique (la solution triviale)  $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = 4 \Leftrightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

4. Dans chaque cas,  $V$  est un espace vectoriel,  $U$  un sous-ensemble de  $V$ . Dans quels cas  $U$  est un sous-espace de  $V$ ?

- (1)  $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = 0\}$ . Sous-espace
- (2)  $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), U = \{f \in V; f(2)(f(-3))^2 = 0\}$ . N'est pas fermé sous l'addition
- (3)  $V = M_{22}, U = \{A \in V; A^2 = 0\}$ . N'est pas fermé sous l'addition
- (4)  $V = \mathbb{R}^3, U = \{X \in V; AX = 2X\}$  où  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  fixe. Sous-espace
- (5)  $V = \mathbb{P}_2, U = \{p(x) \in V; p(0) \geq 0\}$ . N'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire

- A. (2) et (5)
- B. (4) seulement
- C. (3) seulement
- D. (1) et (4)
- E. (1), (2) et (5)
- F. (3) et (4)

(1) U est un sous-espace Notez que  $x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 0 \Rightarrow$

$U = \{(0, 0, 0, 0)\}$  c'est le sous-espace trivial de  $\mathbb{R}^4$

(2) N'est pas un sous-espace  $f(x) = x-2 \in U, g(x) = x+3 \in U$ . Mais  $f(x)+g(x) = 2x+1 \notin U$ . Donc  $U$  n'est pas fermé sous l'addition.

(3) N'est pas un sous-espace  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$  car  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in U$  car  $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Mais  $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin U$ . Alors  $U$  n'est pas fermé sous l'addition.

(4) U est un sous-espace  $U = \{x \in \mathbb{R}^3; (A-2I)x = 0\}$ ; espace des solutions d'un système homogène.

(5) N'est pas un sous-espace  $p(x) = x^2 + 1 \in U$  car  $p(0) = 1 \geq 0$ . Mais  $-2p(x) = -2x^2 - 2 \notin U$ . Alors  $U$  n'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire.

5. Soit  $V$  un espace vectoriel,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  et  $v$  des vecteurs dans  $V$ . Parmi les énoncés suivants, deux sont vrais. Lesquels?

- (1) Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants mais  $v_1, v_2, \dots, v_n, v$  ne le sont pas, alors  $v$  est un multiple scalaire d'au moins un des vecteurs  $v_i$ .
- (2)  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants si la condition suivante est satisfaite: " $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  implique que  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ ".
- (3) Si  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$  est seulement possible lorsque  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , alors  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants.
- (4) Si  $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , alors au moins un des vecteurs  $v_i$  est un multiple scalaire de  $v$ .
- (5) Si  $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , alors  $v_1, v_2, \dots, v_n, v$  sont linéairement dépendants.
- (6) Si  $v_i \neq v_j$  pour tout  $i \neq j$ , alors  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est linéairement indépendant.

A. (1) et (6)

B. (3) et (4)

C. (2) et (6)

D. (2) et (5)

E. (3) et (5)

F. (1) et (2)

(1) Faux  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  sont l. ind. Soit  $v = (1, 1) = v_1 + v_2$ . Alors  $\{v_1, v_2, v\}$  est linéairement dépendants. Mais  $v$  n'est pas un multiple de  $v_1$  ou de  $v_2$ .

(2) Faux Si  $a_1 = \dots = a_n = 0$ , il est clair que  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$  pour n'importe quels vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  (l. ind. ou non). La vraie définition est :

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \text{ implique que } a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

(3) Vrai C'est la définition de l'indépendance linéaire.

(4) Faux  $v = (1, 1) \in \text{span}\{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$  Car  $v = v_1 + v_2$ . Mais ni  $v_1$ , ni  $v_2$  est un multiple de  $v$ .

(5) Vrai  $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \Rightarrow v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n \Rightarrow$

$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n + (-1)v = 0$ . Alors  $v_1, v_2, \dots, v_n, v$  sont l. dépendants.

(6) Faux  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (2, 0)$ , alors  $v_2 \neq v_1$  mais  $\{v_1, v_2\}$  est l. dépendants.

6. [6 points] Considérer les quatre fonctions  $f, g, h$  et  $k$  de l'espace  $\mathbb{F}([0, \frac{3}{2}\pi], \mathbb{R})$  définies par:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = \sin^2 x, \quad k(x) = \cos 2x \quad \forall x \in [0, 2\pi].$$

- (1) Montrer que  $\{f, g, h\}$  est linéairement indépendant.
- (2) Utiliser la partie précédente pour montrer que  $\{f+g, f+h\}$  est aussi linéairement indépendant.
- (3) Donner une base et la dimension de l'espace  $U = \text{span}\{f, g, h, k\}$  (Indication: Utiliser l'identité  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ).
- (4) Si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux éléments de  $U = \text{span}\{f, g, h, k\}$ , peut-on avoir  $U = \text{span}\{\phi, \psi\}$ ?

$$(1) a f + b g + c h = 0 \Rightarrow a x^2 + b \cos^2 x + c \sin^2 x = 0 \text{ pour tout } x \in [0, \frac{3}{2}\pi].$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x=0} \quad a \cdot 0^2 + b \cos^2 0 + c \sin^2 0 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \underline{x=\pi} \quad a \pi^2 + b \cos^2 \pi + c \sin^2 \pi = 0 \Rightarrow \pi^2 a + \frac{b}{0} = 0 \Rightarrow \pi^2 a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \underline{x=\frac{3}{2}\pi} \quad a \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 + b \cos^2 \frac{3}{2}\pi + c \sin^2 \frac{3}{2}\pi = 0 \Rightarrow \frac{9\pi^2}{4} a + c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Alors  $\{f, g, h\}$  est linéairement indépendant.

$$(2) a(f+g) + b(f+h) = 0 \Rightarrow a f + a g + b f + b h = 0 \Rightarrow (a+b)f + a g + b h = 0.$$

Comme  $f, g, h$  sont linéairement indépendants, on conclut que  $a+b=0, a=0, b=0$ .

Donc  $a=b=0$ , et  $\{f+g, f+h\}$  est lin. indep.

$$(3) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1)f + (-1)g. \text{ D'où } k(x) \in \text{span}\{f, g, h\} \text{ car}$$

on peut écrire  $k(x) = (1)f + (-1)g + (0)h$ . On conclut que

$\text{span}\{f, g, h, k\} = \text{span}\{f, g, h\}$ . Comme  $f, g, h$  sont l. ind. (par (1)),

ils forment une base de  $U$ . Alors  $\dim U = 3$

(4) Non  $\dim U = 3$ , alors il faut au moins 3 vecteurs pour former un système générateur de  $U$ .

7. [5 points] Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{22}$ .

(1) Montrer que

$$U = \{X \in M_{22}; A^{-1}X = XA^T\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $M_{22}(\mathbb{R})$ .

(2) Trouver une base et donner la dimension de  $U$ .

(3) Si  $u, v, w, z \in U$ , le sous-ensemble  $\{u, v, w, z\}$  peut-il être linéairement indépendant?

(1)  $A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  et  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Alors

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}; \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}; \begin{bmatrix} 3a-c & 3b-d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}; \begin{matrix} 3a-c = a+b \\ 3b-d = 2a+3b \\ -2a+c = c+d \\ -2b+d = 2c+3d \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22}; \begin{matrix} 2a-b-c = 0 \\ 2a+d = 0 \\ 2a+d = 0 \\ 2b+2c+2d = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} c = s, d = t \text{ sont libres} \\ a = -1/2 t, b = -s - t. \text{ D'où} \end{matrix}$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 t & -s-t \\ s & t \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{C'est un sous-espace de } M_{22}$$

2) On a que  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  est un système générateur de

$U$ . De plus, ces deux matrices sont linéairement indépendantes

car une n'est pas un multiple scalaire de l'autre.

Donc,  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  est une base de  $U$  et  $\dim U = 2$ .

(3) Non car  $\dim U = 2$  et  $\{u, v, w, z\}$  contient 4 vecteurs (Rappel: dans un espace vectoriel de dimension  $n$ , un ensemble contenant plus que  $n$  vecteurs est linéairement dépendant)

8. [6 points] Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (1) Trouver une base et donner la dimension de de l'espace-colonne de A.
- (2) Trouver une base et donner la dimension de de l'espace-ligne de A.
- (3) Trouver une base et donner la dimension du noyau de A.

On trouve la forme échelonnée réduite de A :

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} A \xrightarrow{-3L_1+L_3 \rightarrow L_3} \\ \xrightarrow{(-1)L_1+L_5 \rightarrow L_5} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} \xrightarrow{L_2+L_4 \rightarrow L_4} \\ \xrightarrow{L_2+L_5 \rightarrow L_5} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_3+L_4 \rightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -3L_3+L_1 \rightarrow L_1 \\ 2L_3+L_2 \rightarrow L_2 \end{matrix}} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_1 \rightarrow L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)
 \end{aligned}$$

(1) Une base de l'espace-colonne de A est formée des colonnes de la matrice A qui correspondent aux colonnes-pivot. D'où une base de Col(A) est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \text{ et } \dim \text{Col}(A) = 3$$

(2) une base de l'espace-ligne de A est formée par les lignes-pivot de la forme (\*) ~~(ou par les lignes correspondantes de A)~~

$$\text{Base de l'espace-ligne} = \{ (1, 0, 1, 0, 6, -2), (0, 1, -1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1, -1, 1) \} \\
 \text{et } \dim(\text{Ligne}(A)) = 3.$$

3) Le noyau de  $A$  est l'ensemble des solutions du système homogène  $AX = 0$ . D'après la forme (\*\*) , on voit que  $x_3 = s$ ,  $x_5 = t$ ,  $x_6 = u$  sont des variables libres, et on a

$$x_1 = -s - 6t + 2u, \quad x_2 = s + t \quad \text{et} \quad x_4 = t - u.$$

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -s - 6t + 2u \\ s + t \\ s \\ t - u \\ t \\ u \end{bmatrix} ; s, t, u \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{u}_3} \right\}$$

On sait que les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  sont linéairement indépendants. Alors  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une base de  $\text{Ker } A$  et  $\dim(\text{Ker } A) = 3$ .