1741, automne 2013
Test 2

1. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et B est une matrice de format $3 \times n$ alors la deuxième ligne de la matrice AB est

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où $b_i^t \in \mathbb{R}^n$ est la ième ligne de B.

Alors $AB \in M_{4,n}$.

A. la même que la deuxième ligne de B.
B. la somme des première et deuxième lignes de B.
C. la somme des deuxième et troisième lignes de B.
D. la même que la première ligne de A.
E. la même que la troisième ligne de fA.
F. la somme des première et troisième lignes def B.

$$AB = \begin{pmatrix} b_1 + b_3 \\ b_2 + b_3 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ et donc la réponse correcte est (C)

2. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Quelle est la seconde ligne de A^{-1}?

A. $(-3, 1, 1)$
B. $(5, -3, -11)$
C. $(-1, 1, 0)$
D. $(1, \frac{1}{2}, 1)$
E. $(0, 1, 0)$
F. La matrice A n'est pas inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{②-① \\ ③-2①}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{③+3②}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{①+③}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{-③ \\ ①-②}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

E/

3. Trouver la ou les valeur(s) de t pour lesquelles $(2, 6, 5, 2t)$ appartient au sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $(1, 2, 2, 2)$, $(3, 7, 6, 6)$ et $(1, 2, 1, 2)$.

A. t = -4 seulement
B. t = -2 ou -4
C. t = 0 ou 2
D. t = -2, 0 ou 4
E. t = 2 ou 4
F. t = 2 seulement

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 2t \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = E$$

ssi

$$\exists\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tq. } Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 2t \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où $y \in E$ ssi. $rg(A) = rg(A|y)$.

$$(A|y) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 2t \end{array}\right) \underset{\substack{②-2① \\ ③-2① \\ ④-2①}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2t-4 \end{array}\right).$$

D'où $rg(A) = 3 = rg(A|y)$ ssi $2t - 4 = 0$.

ssi $\underline{t = 2}$

5. Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la forme échelonnée réduite de A.

b) Trouver une base du noyau $\ker A = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid Ax = 0\}$.

c) Est-ce que A est inversible? (Vous n'avez pas à calculer l'inverse s'il existe.)

d) Etendre la base du noyau $\ker A$ en une base de $\mathbf{R}^4$, si cela est nécessaire. (Vous devez soigneusement justifier votre réponse)

a) $A \underset{④-②}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{④-③ \\ ②-③}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{②-①}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{①+2② \\ -②}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D'où $rg(A) = 3$.

b) On a: $\dim(\ker A) = 4 - rg(A) = 1$. On a:

$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ;\ \begin{matrix} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{matrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $A \in M_4(\mathbb{R})$ et $rg(A) = 3$, d'où A n'est pas inversible (le rg n'est pas maximum). On cherche 3 vecteurs $v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tq. si $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ lin. indép. (car $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$!!).

Posons $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D'où $rg(B) = 4$.

et donc $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sont lin. indép.

6. Dénotons par A et B des matrices (avec chacune plus d'une ligne et d'une colonne) et par x un vecteur (colonne) (i.e., une matrice unicolonne $k \times 1$ avec k entier).

Indiquer dans l'espace prévu à cet effet si les énoncés suivants sont (toujours) vrais ou peuvent être faux.

- Si vous pensez que l'énoncé peut être faux, vous devez en donner un exemple numérique ! *(Indication: Essayer toujours de trouver un contre-exemple simple; commencer par essayer avec des matrices 2×2.)*

- Si vous pensez que l'énoncé est juste, vows devez le justifier en fournissant une explication claire, par example en utilisant un résultat vu en classe ou en donnant une preuve correcte.

a) Si A est de format $m \times n$ et de rang $\operatorname{rank} A = m$, alors le système $Ax = 0$ a une unique solution. $\boxed{\text{FAUX.}}$

b) Si $AB = 0$, alors soit $A = 0$ ou $B = 0$. $\boxed{\text{FAUX.}}$

c) Si B a une colonne de zéros, alors AB a une colonne de zéros. $\boxed{\text{VRAI.}}$

a) Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $rg(A) \leq \min\{m,n\}$ (*)

Rappel : $\{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = 0\} = \ker A$ et $\dim(\ker A) = n - rg(A)$

Si $rg(A) = m$, alors par (*), $m \leq n$ et

$\ker(A) = \{0\}$ ssi $m = n$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais $AB = 0$.

c) Rappel : Si $B = (b_1 \dots b_n)$, alors $AB = (Ab_1 \dots Ab_n)$

Si un des b_i est 0, alors $Ab_i = 0$. et donc

AB a une colonne de zéros.

4. Considérons le réseau de routes avec les intersections A, B, C et D ci-dessous. Les flèches indiquent la direction du trafic le long des rues à **sens unique**, et les nombres correspondent au nombre **exact** de voitures qui entrent dans les intersections A, B, C et D et qui sortent de B, C et D en une minute. Chaque x_i dénote le nombre de voitures qui passent le long des routes indiquées durant la même unité de temps.

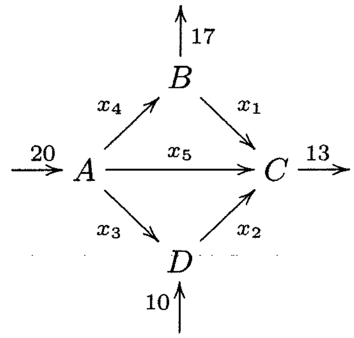
Entrées = Sorties

A) $20 = x_3 + x_4 + x_5$

B) $x_4 = 17 + x_1$

C) $x_1 + x_2 + x_5 = 13$

D) $10 + x_3 = x_2$



D'où le système :

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 + x_5 &= 20. \\ x_1 - x_4 &= -17. \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 13. \\ x_2 - x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Contraintes : x_i, $1 \leq i \leq 5$, sont des entiers positifs (càd ≥ 0).

a) Ecrire un système linéaire qui décrit le flot du trafic, ainsi que **toute les contraintes** sur les inconnues x_i, $i = 1, \dots, 5$.

(Ne résolvez pas le système linéaire! Cela sera fait sous (b), mais ne copiez pas simplement le système linéaire de (b), sinon vous n'obtiendrez pas de points pour cela).

b) La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée du système (a) est

$$\widetilde{(A|b)}' = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En donner la solution générale (Ne tenez pas compte maintenant des contraintes)

c) Si $\overline{AC}$ est fermée au trafic, trouver, en utilisant la partie (b),

(i) le flot de trafic maximum le long de $\overline{BC}$, et

(ii) le flot de trafic minimum le long de $\overline{BC}$.

On a donc un syst. de 4 équations à 5 inconnues $x_1, \dots, x_5$ dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -17 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\sim \widetilde{(A|b)}$$

b). $(\widetilde{A|B})$ est sous forme échelonnée réduite, d'où la sol. générale est

$$\begin{cases} x_1 = -17 + t \\ x_2 = 30 - t - s \\ x_3 = 20 - t - s. \\ x_4 = t \\ x_5 = s. \end{cases} \quad ; \; t, s \in \mathbb{R}$$

---

c) Si $\overline{AC} = x_5 = 0$, on a. $s = 0$

Comme $x_4 = t$, on a : t est un entier ≥ 0.

Comme $x_1 \geq 0$, on a : $t \geq 17$.

$x_2 \geq 0$, on a. $30 - t \geq 0. \Rightarrow t \leq 30.$

D'où x_1 est minimum pour $t = 17$ et $x_1 = 0$.

x_2 est maximum pour $t = 30$ et $x_1 = 13$;

---

7. [Bonus] Soit A une matrice inversible de format 5×5 et B une matrice quelconque de format 5×4 et de rang ~~rank~~ $B = 4$.Démontrer soigneusement que rang $AB = 4$.

<u>Rappel</u>: Si $C \in M_{m,n}$; Alors

$rg(C) = n$ <u>ssi</u> Le syst homog $Cx = 0$ ne possède que la sol. triviale.

$\equiv$ En effet, $\dim(\ker C) = n - rg\, C$ $\equiv$

Si $A \in M_5$ et $B \in M_{5,4}$, alors $AB \in M_{5,4}$. Il suffit de montrer que $\ker(AB) = \{0\}$.

Si $ABx = 0$, alors $A^{-1}(ABx) = (A^{-1}A)Bx = 1\!\!1_5 Bx = Bx =$

D'où $\ker(AB) \subset \ker(B)$..

Par le rappel $(rg(B) = 4)$, $\ker(B) = \{0\}$. D'où $\ker(AB) = \{0\}$.