

1. Soit  $A$  la matrice des coefficients d'un système linéaire homogène de 16 équations et 20 variables.

Si le rang de  $A$  est égale à 10, combien de paramètres y aura-t-il dans la solution générale?

- A. 10
- B. 6
- C. 4
- D. 0
- E. 16
- F. 20

2. Soit la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  et soit  $B$  une matrice de type  $3 \times n$ . Alors la troisième ligne de la matrice (produit)  $AB$  est

- A. la même que la deuxième ligne de  $A$
- B. la même que la première ligne de  $B$
- C. la même que la deuxième ligne de  $B$
- D. la somme de la première et deuxième ligne de  $B$
- E. la somme de la première et troisième ligne de  $B$
- F. la somme de la deuxième et troisième ligne de  $B$

3. Trouvez toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $(1, 2, 3, t)$  est une combinaison linéaire de  $(1, 0, 1, 2)$ ,  $(0, 1, 1, 2)$  et  $(1, 1, 0, 2)$ .

- A.  $t = 4$  ou  $6$
- B.  $t = 4$  seulement
- C.  $t = 6$  seulement
- D.  $t = -2$  ou  $-4$
- E.  $t = 0$  ou  $2$
- F.  $t = -2, 0$  ou  $4$

4. Supposons que  $e, f \in \mathbb{R}$  et considérons le système linéaire en  $x, y$  et  $z$  suivant:

$$\begin{cases} 2x - 2y + ez = f \\ x + z = -1 \\ 3x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

a) Si  $[A|b]$  est la matrice augmentée de ce système, trouvez  $\text{rg}(A)$  et  $\text{rg}([A|b])$  pour toutes les valeurs de  $e$  et  $f$ .

$$[A|b] = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & e & f \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & e & f \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & e-2 & f+2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & e-2 & f+2 \end{array} \right)$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & e-4 & f+4 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } e \neq 4 \\ 2 & \text{si } e = 4 \end{cases}$$

$$\text{rg}([A|b]) = \begin{cases} 3 & \text{si } e \neq 4 \text{ ou } f \neq -4 \\ 2 & \text{si } e = 4 \text{ et } f = -4. \end{cases}$$

(Voir la prochaine page pour Q.4 parties (b) et (c).)

b) En utilisant (a), trouvez toutes les valeurs de  $e$  et  $f$  tels que le système admet

(i) une solution unique

Le système possède une solution unique lorsque  
 $\text{rg}(A) = 3$  et  $\text{rg}([A|b]) = 3$

$$\Rightarrow e \neq 4 \text{ et } f \in \mathbb{R}.$$

(ii) une infinité de solutions

Le système possède une infinité de solutions lorsque  
 $\text{rg}(A) < 3$  et  $\text{rg}([A|b]) = \text{rg}(A)$

$$\Rightarrow e = 4 \text{ et } f = -4$$

(iii) aucune solution (incompatible)

Le système est incompatible lorsque  
 $\text{rg}([A|b]) > \text{rg}(A)$

$$\Rightarrow e = 4 \text{ et } f \neq -4$$

c) Dans le cas d'une infinité de solutions (comme dans b)(ii)) donnez une interprétation géométrique de la solution générale.

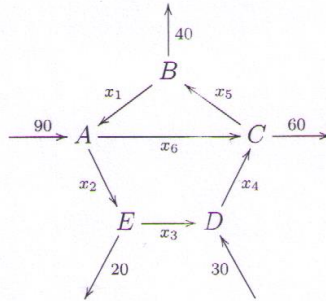
En b) (ii), on a  $e = 4$  et  $f = -4$

$$\Rightarrow [A|b] \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 - z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5

L'ensemble des solutions est une droite passant par  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
avec vecteur directeur  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Considérez le réseau routier avec intersections A, B, C, D et E ci-bas. Les flèches indiquent la direction du trafic qui se fait en une seule direction. Les chiffres et les variables  $x_i$  donnent le nombre de véhicules qui entrent ou sortent par les intersections A, B, C, D et E par minute.



- a) Donnez le système linéaire qui représente ce réseau.

$$\begin{array}{l}
 A: \quad 90 + x_1 = x_2 + x_6 \\
 B: \quad \quad x_5 = 40 + x_1 \\
 C: \quad x_6 + x_4 = 60 + x_5 \\
 D: \quad x_3 + 30 = x_4 \\
 E: \quad \quad x_2 = 20 + x_3
 \end{array}$$

À chaque intersection, le nombre de voiture entrant = le nombre de voiture sortant

$x_i \geq 0$ ,  $x_i$  est un nombre entier.

- b) Si la matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée du système dans la partie (a) est

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -40 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 50 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 30 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 60 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

écrivez la solution générale du système.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Si, dû à des travaux, on ferme la route ED, trouvez le flux minimal le long de la route AC. Justifiez votre réponse.

Si ED ferme, alors  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 30 + x_5 - x_6 = 0$   
 $\Rightarrow x_6 = 30 + x_5$   
 $x_5 = x_6 - 30$

On cherche la valeur minimale de  $x_6$

$$x_1 = -40 + x_5 = -40 + x_6 - 30 = -70 + x_6 \geq 0 \Rightarrow x_6 \geq 70$$

$$x_2 = 50 + x_5 - x_6 = 50 + x_6 - 30 - x_6 = 20$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 60 + x_5 - x_6 = 60 + x_6 - 30 - x_6 = 30$$

$$x_5 = x_6 - 30 \geq 0 \Rightarrow x_6 \geq 30$$

$$x_6 \geq 0$$

En combinant ces restrictions sur  $x_6$ , on voit que  $x_6 \geq 70$   
 $\Rightarrow x_6 = 70$  est le flux minimal le long de AC.

6. Indiquer si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (peut-être) faux, dans la case donnée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (peut-être) faux, vous devez **donner un contre-exemple!**
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) Le noyau,  $\text{Nul}(A)$ , de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  est de dimension 1.

$$\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rg}(A) = \# \text{ variables} = 3$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Nul}(A)) = 1$$

RÉPONSE :

VRAI

b) Un système linéaire incompatible ne peut être homogène.

Tout système homogène possède au moins une solution (la solution triviale)

RÉPONSE :

VRAI

6 (suite).

c) Si  $A$  est une matrice d'ordre 2 telle que  $A^2 = 0$ , alors  $A = 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RÉPONSE :

FAUX

d) Si la matrice échelonnée de la matrice des coefficients d'un système linéaire en deux équations et trois variables a une ligne de zéros, alors ce système admet une infinité de solutions.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice des coefficients  
Alors, le système  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$  est incompatible

RÉPONSE :

FAUX

7. [Bonus] Supposez que  $A$  est une matrice non-nulle d'ordre 3 telle que  $A^T = -A$ . Montrez que  $\text{rg}(A) = 2$ .

Vous devez montrer ceci pour toutes les matrices non-nulles d'ordre 2. Un exemple particulier n'est pas suffisant.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$A^T = -A \Rightarrow A^T + A = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+a=0 & \Rightarrow a=0 \\ d+b=0 & \Rightarrow b=-d \\ g+c=0 & \Rightarrow c=-g \\ d+b=0 & \Rightarrow b=-d \\ e+e=0 & \Rightarrow e=0 \\ f+h=0 & \Rightarrow f=-h \\ h+c=0 & \Rightarrow c=-h \\ h+f=0 & \Rightarrow f=-h \\ i+i=0 & \Rightarrow i=0 \end{cases}$$

Donc  $A = \begin{pmatrix} 0 & -d & -g \\ d & 0 & -h \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$  et puisque  $A \neq 0$ , alors soit  $d \neq 0$ , soit  $g \neq 0$ , soit  $h \neq 0$ .

Si  $d \neq 0$

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} d & 0 & -h \\ 0 & -d & -g \\ g & h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1/d \\ L_2 \rightarrow L_2/d \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h/d \\ 0 & 1 & g/d \\ g & h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - gL_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h/d \\ 0 & 1 & g/d \\ 0 & h & gh/d \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - hL_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -h/d \\ 0 & 1 & g/d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Un argument similaire fonctionne pour les cas " $g \neq 0$ " et " $h \neq 0$ ".

Page supplémentaire pour vos brouillons. V.A

$$\text{Sinon, } d=0 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & -h \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } g \neq 0 \\ A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} g & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} g & h & 0 \\ 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1/g \\ L_2 \rightarrow L_2/g \end{array} \begin{pmatrix} 1 & h/g & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + hL_2} \begin{pmatrix} 1 & h/g & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Sinon  $d=0$  et  $g=0$ , ce qui force  $h \neq 0$ , sous quoi  $A=0$ .

$$\text{Alors } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1/h \\ L_2 \rightarrow L_2/h \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$