Mini-test I, 1741A
automne 2004

1. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}$. Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai?,

faux, A. $(0,0) \in W$, mais W n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires

faux B. W est stable pour l'addition et W est stable pour la multiplication par les scalaires

faux C. W est stable pour l'addition, mais W n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires

VRAI D. W n'est pas stable pour l'addition, mais W est stable pour la multiplication par les scalaires

faux E. $(0,0) \notin W$ mais W est stable pour l'addition

faux F. Aucun des énoncés ci-dessus n'est vrai

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ ssi x ou $y = 0$; d'où W stable par mult. par scal.
d'où A et C faux

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$, d'où W pas stable pour addition.
d'où B et E faux
D est vrai, d'où F faux

2. Parmi les ensembles suivants, lequels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$?

A. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a + d = 0 \right\}$ A est un sev.

B. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; ad = 1 \right\}$ $0 \notin B$, d'où B pas sev.

C. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \text{ sont des entiers} \right\}$ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin C$, d'où C pas sev.

D. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; ad - bc = 0 \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$, mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin D$

E. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a = 1 \right\}$, $0 \notin E$, d'où E n'est pas sev.

F. Aucun des sous-ensembles ci-dessus.

3. Parmi les ensembles suivants, lequels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; 2x - y + 3z = 0 \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; xy = 0 \right\}$

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; 2x = 5z \right\}$ (4) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;;\; \frac{x}{2} = \frac{y+3}{5} = 7z \right\}$

A. 1 et 2
B. 3 et 4
C. 1 et 3
D. 2 et 4
E. 2 et 3
F. 1, 3 et 4

① plan passant par 0 et normal à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où sev

③ — — — $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, —

② n'est pas un sev, car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in$ ②, mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin$ ②.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin$ ④, d'où ④ n'est pas un sev.

4. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels engendrent W?

W est le plan passant par 0 et normal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Non A. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, car $W \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Non B. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$.

non, car $=\{u, -u\}$ C. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

non. D. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ W est un plan, et donc tout syst. de gen. a au moins 2 vect.

oui E. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\in W$ et non colinéaires

non F. $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\notin W}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

5. Considérons les ensembles suivants et leurs opérations:
(1) $V = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$, muni des opérations vectorielles habituelles de $\mathbb{R}^2$.
(2) $W = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,\ y,\ z$ sont rationnels$\}$, muni des opérations vectorielles habituelles de $\mathbb{R}^3$.
(3) $\mathbb{R}^2$ avec une addition définie par

$$(x,\ y) \oplus (x',\ y') = (x - x',\ y - y')$$

et la multiplication habituelle par un scalaire.
Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai?

A. (1), (2) and (3) sont des espaces vectoriels réels
B. Seuls (1) and (2) sont des espaces vectoriels réels
C. Seuls (2) and (3) sont des espaces vectoriels réels
D. Seuls (1) and (3) sont des espaces vectoriels réels
E. Seul (1) est un espace vectoriel réel
F. Aucun d'entre eux n'est un espace vectoriel réel.

1) $(0,0) \notin V$, d'où V n'est pas un e.v.

2) $(1,0,0) \in W$, mais $\pi(1,0,0) = (\pi,0,0) \notin W$
d'où W n'est pas un e.v. réels

3) Avec cette addition $\mathbb{R}^2$ n'est pas un ev, car
$2(x,y) = (2x, 2y) \neq (x,y) \oplus (x,y)$

6. Soit $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U = \{\, v \in \mathbb{R}^3 \mid u_0 \times v = 0 \,\}$

a) Montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y - x \end{pmatrix}$$

b) En utilisant la conclusion de (a), montrer que $U = \mathrm{Span}\,\{u_0\}$.

c) Donner une description géométrique complète de U.

d) Ext-ce que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix}$

b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ;\ u_0 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;\ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\,\{u_0\}.$

c) U est la droite passant par O et de vect. directeur u_0.

d) Par (c) ou (b), U est un sev de $\mathbb{R}^3$

7. Considérons $\mathcal{F}([0,2])$ l'espace vectoriel $\{f \mid f : [0,2] \to \mathbb{R}\}$, muni des opérations standards. Considérons les fonctions f, g, h, et k définies pour tout $x \in [-1,1]$ par les formules suivantes :

$$f(x) = x - 2x^2, \quad g(x) = 2x^2 + \cos x, \quad h(x) = x, \quad k(x) = x + \cos x$$

et soit $W = \text{span}\{f, g\}$.

a) W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,2])$. Expliquez en la raison.

b) Montrer que $h \notin W$.
(Indication: Supposer $h \in W$ et évaluer l'équation obtenue en trois points.)

c) Montrer que $k \in W$.

a) Comme W est une ens. lin., W est un sev de $\mathcal{F}([0,2])$

b) Pour que $h \in W$, il faut qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq
$h(x) = a f(x) + b g(x), \ \forall x \in [0,2]$.
càd $x = a(x - 2x^2) + b(2x^2 + \cos x), \ \forall x \in [0,2]$.

On a $h(0) = 0 = f(0)$ et $g(0) = 1$, d'où $b = 0$.
De plus $h(1) = 1$ et $f(1) = -1$, et $1 = -a$.
$h(2) = 2$ et $f(2) = -6$. et $2 = -6a$ | Impossible

c) $k(x) = x + \cos x = (x - 2x^2) + (2x^2 + \cos x) = f(x) + g(x)$
D'où $k = f + g \in \text{Span}\{f, g\}$

8. Parmi les énoncés ci-dessous, indiquer (dans l'espace prévu) lesquels sont vrais ou faux. Vous devez justifier vos réponses!!

i) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices de format (2×2).

$\boxed{\text{OUI}}$

Pour le vérifier on peut utiliser le critère des sev ou remarquer que

$U = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'où est un sev.

ii) $V = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \}$.

$\boxed{\text{NON.}}$

car $f(x) = x^2 \in V$, mais la fct. $(-f) \notin V$