

# Mini-test I, 1741A, automne 2003

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ?

$$U = \{(x, x+y, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(x+y, y, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(x^2, y, x) ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

- A.  $U$  et  $V$  seulement
- B.  $U$  et  $W$  seulement
- C.  $V$  et  $W$  seulement
- D.  $U$  seulement
- E.  $V$  seulement
- F.  $W$  seulement

$U = \text{Span} \{ (1, 1, 0), (0, 1, 1) \}$  et  
 $V = \text{Span} \{ (1, 0, 0), (1, 1, 1) \}$ . D'où  
 $U$  et  $V$  sont des sev de  $\mathbb{R}^3$ .

$W$  ne l'est pas, car  $(1, 0, 1) \in W$ , mais

$$2(1, 0, 1) \notin W$$

Solution de 2 :  $(0, 0, 0) \in W$ , car  $0^2 = 0$  !

- $W$  est stable pour la mult. par les scalaires, car si  $w = (x, y, z) \in W$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors  $(kx)(ky) = k^2 xy = 0 = k^2 xz = (kx)(kz)$ .
- $W$  n'est pas stable pour l'addition, car  $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in W$ , mais  $(1, 1, 0) \notin W$ .

2. Soit  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; xy = xz = 0\}$ . Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai?

- A.  $(0, 0, 0) \in W$ , mais  $W$  n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires.
- B.  $W$  est stable pour l'addition et ne l'est pas pour la multiplication par les scalaires.
- C.  $W$  est stable pour l'addition, mais ne l'est pas pour la multiplication par les scalaires.
- D.  $W$  n'est pas stable pour l'addition, mais  $W$  l'est pour la multiplication par les scalaires.
- E.  $(0, 0, 0) \notin W$ , mais  $W$  est stable pour l'addition.
- F. Aucun des énoncés ci-dessus n'est vrai.

3. Soit  $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 ; x = 0 \text{ et } y + z + w = 0\}$ . Alors,

- A.  $W = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
- B.  $W = \text{span}\{(0, 1, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$
- C.  $W = \text{span}\{(0, 1, 0, 0)\}$
- D.  $W = \text{span}\{(0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$
- E.  $W = \text{span}\{(0, 0, 1, 0)\}$
- F.  $W = \text{span}\{(0, 2, -1, -1), (0, 4, -2, -2)\}$

$$W = \{(0, y, z, w) ; y + z + w = 0\} = \{(0, -z - w, z, w) ; z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{span}\{(0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$$

4. Parmi les sous-ensembles suivants de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f ; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , quels sont les deux sous-espaces vectoriels ?

$$S = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(x) = f(2x), \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) > 0\}$$

$$U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) = 1\}$$

- A. V et T.
- B. T et U.
- C. S et T.
- D. V et S.
- E. S et U.
- F. V et U.

- La fon. 0 n'est ni ds T, ni ds U ; d'au  
T et U ne sont pas des sev.

- U est l'ens. des fon. impaires ; c'est donc un sev.

Donc la réponse correcte est U.

Rau. Par le test des sev, on a : S est un sev.

5. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $M_2(\mathbb{R})$ ?

$$(1) \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2) \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; xw - zy = 0 \right\}, \quad (4) \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- A. (1) et (2)  
 B. (1) et (3)  
 C. (1), (2) et (3)  
 D. (2), (3) et (4)  
 E. (3) et (4)  
 F. (1), (2) et (4)

$$\textcircled{1} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{2} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{4} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{4}$  sont des sev.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont ds  $\textcircled{1}$ , mais  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \textcircled{1}$ .

Donc  $\textcircled{3}$  n'est pas un sev.

6. Soit  $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  et

$$U = \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \|w - u_0\| = \|w - v_0\| \}$$

a) Montrer que

(1.5)

$$\|w - u_0\|^2 = \|w - v_0\|^2 \quad \text{si et seulement si} \quad w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

et en conclure que

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; x + y = 0 \right\}$$

(Indication: Développer les deux cotés en utilisant le produit scalaire).

(1.5)

b) En utilisant la conclusion de (a), donner une description géométrique complète de  $U$ .

(1)

c) Expliquer la raison pour laquelle  $U$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

(2)

d) Exhiber un système de générateurs de  $U$ .

$$\begin{aligned} \text{a) On a ; } \|w - u_0\|^2 &= (w - u_0) \cdot (w - u_0) = w \cdot w - u_0 \cdot w - w \cdot u_0 + u_0 \cdot u_0 \\ &= \|w\|^2 - 2 u_0 \cdot w + \|u_0\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{et } \|w - v_0\|^2 = \|w\|^2 - 2 v_0 \cdot w + \|v_0\|^2 \quad (1)$$

$$\text{Comme } \|v_0\|^2 = \|u_0\|^2 = 2, \quad w \in \mathbb{R}^2 \text{ get : } 2 (u_0 - v_0) \cdot w = 0.$$

$$\text{d'où } (u_0 - v_0) \cdot w = 0 \text{ et donc } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot w = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } U &= \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \|w - u_0\| = \|w - v_0\| \} = \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \|w - u_0\|^2 = \|w - v_0\|^2 \} \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot w = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ; 2(x+y) = 0 \right\} \\ &= \{ w \in \mathbb{R}^2 ; x+y = 0 \}. \quad (1/2) \end{aligned}$$

b)  $U$  est donc la droite d'équ.  $y = -x$ ; c'est  
donc la droite passant par l'origine et le  
vecteur directeur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

c)  $\textcircled{1}$   $U$  est un sev. de  $\mathbb{R}^2$ , par (b) on vérifie le  
test des sev. ou encore, car  $U$  est une enveloppe linéaire.

$$d) U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x+y=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \textcircled{1}. \text{ (just. } \frac{1}{2} \text{)}$$
$$= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  est un sys. de générateurs  $\textcircled{1}$ .

7. Considérons  $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f; f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  l'espace vectoriel des fonctions de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni des opérations standards. Considérons les fonctions  $f, g, h$ , et  $k$  définies pour  $x \in [-1, 1]$ , par les formules suivantes :

$$f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x+2}, \quad h(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+2}; \quad k(x) = 1$$

et soit  $W = \text{span}\{f, g\}$ .

① a) Expliquer la raison pour laquelle  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$ .

② b) Montrer que  $h \in W$ .

③ c) Montrer que  $k \notin W$ .

(Indication: Supposer  $k \in W$  et en évaluant l'équation obtenue en trois points, arriver à une contradiction.)

a) Comme  $f, g \in V$ , et que  $W = \text{Span}\{f, g\}$ ,  $W$  est un sev de  $V$ .  
①

b) On a:  $h(x) = \frac{x(x+2)+3}{x+2} = x + \frac{3}{x+2} = f(x) + 3g(x)$

D'où  $h = f + 3g \in \text{Span}\{f, g\} = W$ .

c) Si  $k \in W$ , il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tq  $k = a f + b g$ .  
①

cad  $k(x) = 1 = a f(x) + b g(x), \quad \forall x \in [-1, 1]$

d'où  $1 = ax + \frac{b}{x+2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$

en  $x=0$ :  $1 = \frac{b}{2}$  et d'où  $b = 2$ .

en  $x=1$ :  $1 = a + \frac{2}{3} \Rightarrow a = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ .

① pour l'évaluation en 3 pts

① pour la conclusion

Mais, en  $x = -1$  on a:

$$\frac{1}{3} f(-1) + 2 \cdot g(-1) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{-1+2} = -\frac{1}{3} + 2 \neq 1.$$

Il n'y a donc pas  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$h(x) = a f(x) + b g(x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

càd  $\mathbb{R} \not\subseteq \text{Spanne}\{f, g\} = W.$