Mini-test I, 1741A, automne 2002

1. Parmi les trois ensembles suivants

$$U = \{\begin{bmatrix} x & x \\ y & x-y \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\begin{bmatrix} x & x+y \\ y & y \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et}$$

$$W = \{\begin{bmatrix} x & x \\ y & xy \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}$$

lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

A. U et V seulement
B. U et W seulement
C. V et W seulement
D. U seulement
E. V seulement
F. W seulement

$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ et donc est un sev.

$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sev.

W n'est pas un sev, car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont ds W

mais $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin W$.

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels?

(1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$, muni des opérations habituelles de $\mathbb{R}^3$.

(2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$, muni des opérations habituelles de $\mathbb{R}^3$.

(3) $\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, muni des opérations habituelles de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

A. (3) seulement
B. (2) seulement
C. (2) et (3)
D. (1) et (2)
E. (1) seulement
F. (1) et (3)

1 est un plan passant par 0, d'où un sev.

2 n'est pas un sev., car
$(1,1,0)$ et $(0,0,1) \in$ 2, mais $(1,1,1) \notin$ 2.

3 est un sev, car 3 $= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Parmi les ensembles suivants, lequel engendre le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini ainsi

$$\underline{P} = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}\ ?$$

A. $\{(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$
B. $\{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1)\}$
C. $\{(1,\ 0,\ 0)\}$
D. $\{(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1)\}$
E. $\{(1,\ -1,\ -1)\}$
F. $\{1,\ -1,\ -1),\ (1,\ 0,\ 1)\}$

$$\underline{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x = y+z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $\underline{IV}$: Comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

D'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et donc

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

4. Parmi les énoncés suivants, quels sont les deux qui sont exacts?

FAUX. I. L'enveloppe linéaire de deux vecteurs distincts u et v de $\mathbb{R}^3$ est un plan passant par l'origine.

FAUX II. L'enveloppe linéaire d'un vecteur u de $\mathbb{R}^2$ est une droite.

VRAI III. Un ensemble $\{u, v, w\}$ de vecteurs engendre un espace vectoriel X si tout vecteur $x \in X$ est une combinaison linéaire de v et w.

VRAI IV. L'ensemble $\{(1,0),(1,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$.

FAUX V. L'ensemble $\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{``\mathcal{B}"}$ engendre l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de format (2×2) .

A. I & III
B. II & IV
C. I & II
D. III & IV
E. III & II
F. I & V

Pour I, soit $u = 0$ et $v \neq 0$, $\mathrm{Span}\{u, v\}$ est une droite

Pour II, si $u = 0$, $\mathrm{Span}\{u\} = \{0\}$!

Pour III, $X = \mathrm{Span}\{v, w\} \subseteq \mathrm{Span}\{v, w, u\} = X$.

Pour V. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(\mathcal{B})$.

5. Parmi les ensembles suivants, quels sont les deux qui **NE** sont **PAS** des sous-espaces de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$?

$S = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \text{ ou } f(3) = 0\}$
$T = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ (toutes les fonctions impaires)
$U = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(1) > 0\}$
$V = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$

A. V et T.
B. T et U.
C. S et T.
D. V et S.
E. S et U.
F. V et U.

- S n'est pas un sev, car

$f_1(x) = x-1$ et $f_2(x) = x-3$ sont ds S

Mais $f_1 + f_2 \notin S$, car $(f_1+f_2)(1) = -2$ et
$(f_1+f_2)(3) = 2$.

- T est un sev (vu au cours).

- U n'est pas un sev, car $0 \notin U$.

- V est un sev, par le test des sev.

6. Soit $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \text{proj}_v(u) = 0\}$

a) Montrer que si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors $\text{proj}_v(u) = \frac{y-2z}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Trouver une équation cartésienne de U.

c) Donner une description géométrique complète de U. Est-ce que U est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$?

d) Trouver un système de générateurs de U.

(a) $\text{proj}_v(u) = \dfrac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \dfrac{y-2z}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \ \dfrac{y-2z}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \ y - 2z = 0 \right\}$.

car $\text{proj}_v(u) = 0$ <u>ssi</u> $y - 2z = 0$

(c) U est le plan passant par 0 et normal au vect $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, U est un sev.

(d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \ y - 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix} ; \ x, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ x, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme donc un syst. de gén. de U.

7. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \{f \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, muni des opérations habituelles. Rappellons que la fonction zero de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est la fonction qui vaut 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $W = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in R\}$ le sous-ensemble des fonctions paires.

a) Montrer que W est un sous-espace de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

b) Si $f(x) = 1$ est constant, $g(x) = \sin^2 x$ et $h(x) = \sin x$, montrer que $f, g \in W$ mais que $h \notin W$.

c) Expliquer la raison pour laquelle $U = \text{Span}\{1, \sin^2 x\}$ est un sous-espace de W, sans utiliser le test des sous-espaces.

(a) La fct. $0 \in W$, car $0(x) = 0 = 0(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $f, g \in W$, $(f+g)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de} \\ \text{l'addition}}}{=} f(x)+g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f,g \in W}}{=} f(-x)+g(-x) = (f+g)(-x)$

D'où $f+g \in W$.

Si $f \in W$ et $a \in \mathbb{R}$, $(af)(x) = a f(x) = a\cdot f(-x) = (af)(-x)$.

d'où $af \in W$.

Par le test des sev, W est un sev de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

(b) Comme $f(x) = 1 = f(-x)$, $f \in W$. La fct. sin est impaire et non nulle, d'où n'est pas W, mais $g = \sin^2$ l'est, car $g(-x) = \sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2$

$= \sin^2(x) = g(x)$.

Autre manière: $h(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $h(\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où $h \notin W$.

(c) Comme U est l'enveloppe linéaire de 2 vect de W ; U est un s.e.v. de W.

Rem. C'est en fait le "plus petit sev" de W qui contient 1 et x^2.