noté sur 10

MAT 1722A – Devoir 3 (dû le mercredi 16 février 2011 à 8h30)

NOM (en lettres moulées): SOLUTIONS Prénom: exercices corrigés: #1, 2 et 5

[4 pts] **1.** On considère le problème à valeur initiale $y' = -4xy$, $y(0) = 3$.
(a) Estimez $y(1)$ par la méthode d'Euler avec 10 pas, et arrondir la réponse à 4 décimales.
(b) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle $y' = -4xy$?
(c) Quelle est la valeur exacte de $y(1)$? Arrondir votre réponse à 4 décimales.
(d) Quelle est l'erreur d'approximation en (a)?

**Solution:** **Réponses:** (a) $y(1) \simeq 0.3731$ (b) $y(x) = Ae^{-2x^2}$

(c) $y(1) = 0.4060\ldots$ (d) Erreur $= 0.0329$

(a) On doit prendre $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$ de sorte qu'en posant $x_i = 0 + ih = 0.1i$, on ait $x_0 = 0$ et $x_{10} = 1$. La méthode d'Euler donne $y(x_i) \cong y_i$ avec $y_0 = y(0) = 3$ et

$$y_{i+1} = y_i + (-4x_iy_i)h = y_i - 0.4x_iy_i = y_i(1 - 0.4x_i) \quad i = 0, \ldots, 9$$

On trouve :

$x_0 = 0$, $y_0 = 3$
$x_1 = 0.1$, $y_1 = 3(1 - 0.4 \times 0) = 3$
$x_2 = 0.2$, $y_2 = 3(1 - 0.4 \times 0.1) = 2.88$
$x_3 = 0.3$, $y_3 = 2.88(1 - 0.4 \times 0.2) = 2.6496$
$x_4 = 0.4$, $y_4 = 2.6496(1 - 0.4 \times 0.3) \cong 2.331648$
$x_5 = 0.5$, $y_5 \cong 1.958584$
$x_6 = 0.6$, $y_6 \cong 1.566867$
$x_7 = 0.7$, $y_7 \cong 1.190819$
$x_8 = 0.8$, $y_8 \cong 0.857389$
$x_9 = 0.9$, $y_9 \cong 0.583025$
$x_{10} = 1$, $\boxed{y_{10} \cong 0.373136}$

(b) C'est une équation différentielle à variables séparées. On trouve

$$\frac{1}{y}dy = -4x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = -4\int x\,dx \Rightarrow \ln|y| = -2x^2 + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-2x^2} \Rightarrow y = Ae^{-2x^2} \text{ où } A = \pm e^C \text{ est constante.}$$

(c) $y(0) = 3 \Rightarrow 3 = Ae^0 \Rightarrow A = 3 \Rightarrow y(x) = 3e^{-2x^2} \Rightarrow \boxed{y(1) = 3e^{-2} \cong 0.4060\ldots}$

(d) L'erreur d'approximation en (a) est $0.4060 - 0.3731 \cong 0.0329$, soit une erreur relative d'environ 8 %.

[4 pts] **2.** Paul, 8 ans, aimerait bien voir ses parents les matins de semaine avant d'aller à l'école, mais c'est sa grande soeur Lise qui le réveille à 7h30 et déjeune avec lui. Sur la table, il y a chaque matin le pot de confiture que ses parents ont sorti du réfrigérateur juste avant de partir. Paul note que le pot est bien plus chaud que dans le réfrigérateur. Ses parents partent donc bien tôt, mais quand? Avec l'aide de sa soeur, il note qu'à 7h30, la confiture est à 8°C. Avant de partir pour l'école, à 8h27, elle est à 11°C. Enfin, la température de la pièce est de 22°C tandis qu'à l'intérieur du réfrigérateur il fait 4°C.

Soit $t$ le temps en heures à partir de 7h30, et soit $T(t)$ la température du pot de confiture au temps $t$. On suppose que celle-ci obéit à la loi du réchauffement de Newton,

(a) Établissez une équation différentielle pour $T(t)$ et résolvez-la.
(b) Déterminez l'heure du départ des parents de Paul et Lise.

**Solution:** **Réponses:** (a) $T(t) = 22 - 14e^{-0.2538t}$ (b) ils partent vers 6h30

(a) La température de la pièce est de 22°C, donc

$$\frac{dT}{dt} = k(T-22) \quad \text{pour une constante } k.$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T-22} = k\,dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|T-22| = kt + C$$

$$\Rightarrow |T-22| = e^{kt+C} \Rightarrow T-22 = \pm e^{C} e^{kt} \Rightarrow \boxed{T = 22 + Ae^{kt}}$$

A 7h30, le pot est à 8°C $\Rightarrow T(0) = 8 \Rightarrow 8 = 22 + A \Rightarrow A = -14$

$$\Rightarrow \boxed{T = 22 - 14e^{kt}}$$

A 8h27, le pot est à 11°C $\Rightarrow T\left(\frac{57}{60}\right) = 11$

$$\Rightarrow 11 = 22 - 14e^{k(57/60)} \Rightarrow e^{k(57/60)} = \frac{11}{14}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(11/14)}{57/60} \cong -0.2538$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 22 - 14e^{-0.2538t}}$$

(b) On cherche $t$ tel que $T(t) = 4$ (la température du réfrigérateur est de 4°C). On trouve

$$4 = 22 - 14e^{-0.2538t} \Leftrightarrow e^{-0.2538t} = \frac{22-4}{14} = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(9/7)}{-0.2538} = -0.990.$$ Les parents ont sorti le pot vers 6h30.

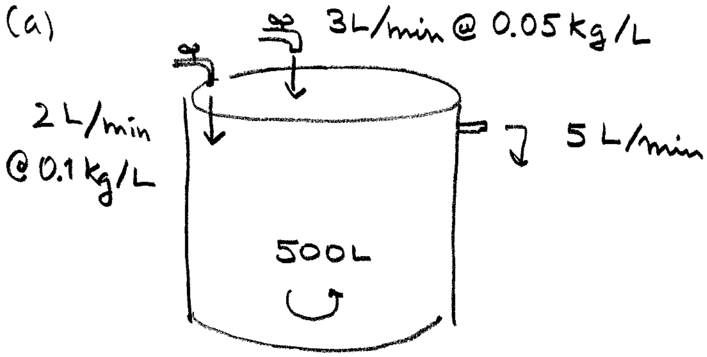
**3.** Une citerne contient 500 litres d'eau pure. De la saumure qui contient 0.1 kg/L de sel y est introduite à raison de 2 L/min. Une autre saumure qui contient 0.05 kg/L de sel y est introduite à raison de 3 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au taux de 5 L/min. Soit $Q(t)$ la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps $t$ (en minutes).

(a) Établissez une équation différentielle pour $Q(t)$ et résolvez-la.

(b) Combien de sel y a-t-il dans la citerne après 4 heures ?

**Solution:** **Réponses:** (a) $Q(t) = 35 - 35e^{-t/100}$ (b) 31.82 kg

(a)




$$\frac{dQ}{dt}(t) = (\text{débit de sel entrant}) - (\text{débit de sel sortant})$$
$$= (2 \times 0.1 + 3 \times 0.05) - 5 \times (\text{concentration de sel au temps } t)$$
$$= 0.35 - 5 \times \frac{Q(t)}{500}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0.35 - \frac{Q}{100} = \frac{35 - Q}{100} \Rightarrow \frac{dQ}{Q-35} = -\frac{dt}{100}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dQ}{Q-35} = -\frac{1}{100}\int dt \Rightarrow \ln|Q-35| = -\frac{t}{100} + C$$

$$\Rightarrow |Q-35| = e^{-t/100 + C} \Rightarrow Q - 35 = \pm e^{C} e^{-t/100}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 35 + Ae^{-t/100}} \text{ où } A = \pm e^{C} \text{ est constante.}$$

Au temps $t=0$, on a $Q(0) = 0$ car la citerne ne contient que de l'eau pure.

$$\Rightarrow 0 = 35 + Ae^{0} = 35 + A \Rightarrow A = -35$$
$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 35 - 35e^{-t/100}}$$

(b) 4 heures font 240 minutes. On cherche $Q(240) = 35 - 35e^{-2.4} \cong 31.82$

**4.** Un groupe d'écologistes estiment que la réserve faunique de St-Aléas peut supporter un troupeau de 2000 caribous. Ils savent par ailleurs que le taux de croissance relatif de l'espèce est de 0.125 par an pour une population petite par rapport à la capacité du milieu. Un troupeau de 400 caribous est introduit dans la réserve.
(a) Donnez une formule pour le nombre $P(t)$ de caribous après $t$ années, en supposant que leur population suit le modèle logistique.
(b) Combien de temps faudra-t-il pour que la population atteigne 1000 caribous?

**Solution:** **Réponses:** (a) $P(t) = \dfrac{2000}{1+4e^{-0.125t}}$ (b) 11.09 années

(a) On a $k = 0.125$ et $K = 2000$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0.125\, P\left(1 - \frac{P}{2000}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{2000}{1 + Ae^{-0.125t}}$$ où $A$ est constante

$$P(0) = 400 \Rightarrow 400 = \frac{2000}{1+A} \Rightarrow A = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = \frac{2000}{1 + 4e^{-0.125t}}}$$

(b) On cherche $t$ tel que $P(t) = 1000$

$$\Leftrightarrow 1000 = \frac{2000}{1 + 4e^{-0.125t}}$$

$$\Leftrightarrow 4e^{-0.125t} = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(1/4)}{-0.125} \cong 11.09$$

[2pts] **5.** Déterminez dans chaque cas si la suite donnée converge ou diverge. Si elle converge, déterminez sa limite. Dans tous les cas, encadrez vos réponses,

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n\,2n}{n^2+3n}$ (b) $a_n = \sin(n+1)$ (c) $a_n = \dfrac{5n^2+6n+3}{3n^2+7}$ (d) $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+8}}$

**Solution:**

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 2n}{n^2+3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 2}{n+3} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)$ n'existe pas car $\sin(n+1)$ oscille entre $-1$ et $1$

(On peut montrer que les valeurs de $\sin(n+1)$ sont denses dans $[-1,1]$. C'est dû au fait que $\pi$ est irrationnel.)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+6n+3}{3n^2+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n^2}} = \dfrac{5}{3}.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+8}} = \dfrac{3}{2^8} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $3/2 > 1$.

Les suites en (a) et (c) sont convergentes. Celles en (b) et (d) sont divergentes.