

CALCUL II (MAT1722 C)
EXAMEN PARTIEL (Automne 2010)

Prof. Joseph Khoury

durée: 80 minutes

NOM de famille: Soluh'ou

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

- Aucune note n'est permise.
- Seules Les calculatrices non programmables sont permises
- Cet examen comporte 5 questions et 8 pages
- Vous devez répondre à toutes les questions
- Toutes les questions sont à développement et valent un total de 25 points
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages additionnelles à la fin si vous manquez d'espace

1. [5 points] Trouver l'intégrale:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} dx.$$

Solution Par la méthode des fractions partielles

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (3A+B+2C)x + (2A+2B+C)}{(x+1)^2(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 & \textcircled{1} \\ 3A+B+2C=1 & \textcircled{2} \\ 2A+2B+C=0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow C = -A$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow A+B=1 \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{3} \Rightarrow A+2B=0 \end{array} \right\} \Rightarrow B=-1, A=2$$

$$\Rightarrow C = -2$$

$$\text{D'où} \quad \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)} dx = 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 2 \ln|x+2| + C$$

$$= 2 \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + \frac{1}{x+1} + C$$

2. [5 points]

(1) [3 points] Déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non. Si vous dites qu'elle converge, trouver sa valeur et si vous dites qu'elle diverge, expliquer pourquoi.

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

(2) [2 points] Utiliser le théorème de comparaison pour déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}(1+\sin^2 x)} dx$$

Solution (1) $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x e^{-x} dx$

Par parties $u = x, v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1, v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$\int_1^t x e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_1^t = -t e^{-t} - e^{-t} - (-2e^{-1}) = -\frac{t+1}{e^t} + \frac{2}{e}$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{t+1}{e^t} + \frac{2}{e} \right] = \frac{2}{e} < +\infty. \text{ Alors}$$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx \text{ converge et sa valeur est } \frac{2}{e}$$

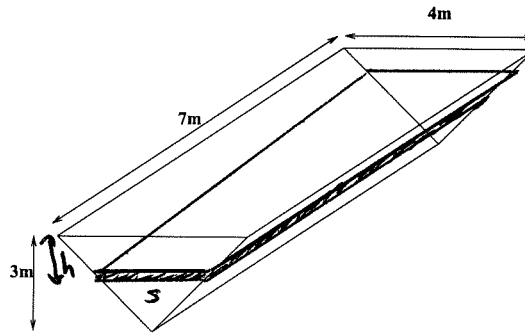
(2) on a : $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow$

$$x^{3/2} \leq x^{3/2} (1 + \sin^2 x) \leq 2x^{3/2} \Rightarrow \frac{1}{2x^{3/2}} \leq \frac{1}{x^{3/2}(1+\sin^2 x)} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{2x^{3/2}} dx$ diverge (intégrale $p=3/2 > 1$ du type II),

$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}(1+\sin^2 x)} dx$ diverge aussi par le test de Comparaison.

3. [5 points] Un réservoir d'eau a la forme suivante:



où les deux triangles qui figurent sont isocèles. Si le réservoir est rempli d'eau (de densité 1000 Kg/m^3), trouver le travail nécessaire pour vider le réservoir en pompant toute l'eau par dessus bord.

(Utiliser le fait que l'accélération due à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$)

Solution Prenons une tranche horizontale d'eau située à une distance h du dessus bord et d'épaisseur Δh .

Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est égale au poids de la tranche multiplié par la distance h :

$$7s \Delta h 1000 9.8 h \quad (*)$$

Par la propriété des triangles semblables on a:

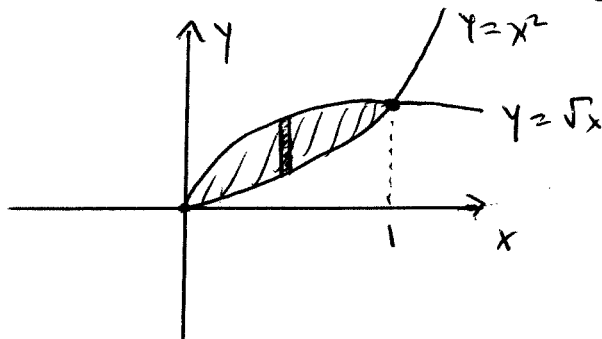
$$\frac{s}{4} = \frac{3-h}{3} \Rightarrow s = \frac{4}{3}(3-h) \quad \text{et } (*) \text{ devient}$$

$\frac{28}{3}(3-h) 9800 h \Delta h$. Le travail total est alors

$$\int_0^3 \frac{28}{3} 9800 (3-h) h 2h = \frac{28}{3} (9800) \left[\frac{3}{2} h^2 - \frac{h^3}{3} \right]_0^3 = 411600 \text{ J}$$

4. [5 points] Considérer la région limitée par les fonctions $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.
- (1) [1 point] Tracer la région et en trouver l'aire.
 - (2) [2 points] Trouver le centre de masse de la région, en supposant qu'elle est homogène.
 - (3) [2 points] Trouver le volume du solide obtenu en tournant la région autour de l'axe Oy .

Solution (1)



d'où de la région est

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(2) Les coordonnées du centre de masse sont :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_0^1 x (f(x) - g(x)) dx = \frac{1}{1/3} \int_0^1 x (\sqrt{x} - x^2) dx = 3 \int_0^1 (x^{3/2} - x^3) dx \\ &= 3 \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = 3 \left[\frac{3}{20} \right] = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2A} \int_0^1 (f(x)^2 - g(x)^2) dx = \frac{1}{2/3} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

(3) Prenons une tranche verticale à une distance x de Oy et d'épaisseur Δx . Le volume du solide obtenu en faisant tourner la tranche autour de Ox est $\pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] \Delta x$

Le volume du solide est alors $\int_0^1 \pi (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}$

5. [5 points] Utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre chacune des équations différentielles suivantes (avec conditions initiales):

$$(1) \frac{dy}{dx} = x + xy^2, \quad y(0) = 1$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = e^{2x-y}, \quad y(0) = 0.$$

Solution (1) $\frac{dy}{dx} = x + xy^2 = x(1+y^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x dx$$

$$\Rightarrow \text{Arctan } y = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow \text{Arctan } 1 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C \Rightarrow C = \pi/4$$

$$\text{Arctan } y = \frac{1}{2} x^2 + \pi/4 \Rightarrow \boxed{y = \tan\left(\frac{1}{2} x^2 + \pi/4\right)}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = e^{2x-y} = e^{2x} \cdot e^{-y} \Rightarrow e^y dy = e^{2x} dx \Rightarrow$$

$$\int e^y dy = \int e^{2x} dx \Rightarrow e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow e^0 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{2}\right)}$$

CALCUL II (MAT1722 3X)

Examen partiel (Été 2011)

Prof. Joseph Khoury

durée: 100 minutes

NOM de famille: Solution

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

- Aucune note n'est permise.
- Seules Les calculatrices non programmables sont permises
- Cet examen comporte 7 questions et 10 pages
- Vous devez répondre à toutes les questions
- Toutes les questions sont à développement et valent un total de 30 points
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages additionnelles à la fin si vous manquez d'espace

1. [5 points] Trouver l'intégrale:

$$\int \frac{9x^2}{(x-1)^2(x+2)} dx.$$

Solution
$$\frac{9x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow 9x^2 = (A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A+2B+C \Rightarrow \begin{cases} A+C=9 & \textcircled{1} \\ A+B-2C=0 & \textcircled{2} \\ -2A+2B+C=0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow C = 9 - A$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Rightarrow A+B-18+2A=0 \Rightarrow 3A+B=18 & \textcircled{4} \\ \textcircled{3} &\Rightarrow -2A+2B+9-A=0 \Rightarrow -3A+2B=-9 & \textcircled{5} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \right\} \textcircled{4} + \textcircled{5} \Rightarrow 3B=9 \Rightarrow \boxed{B=3}$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow 3A = 18 - 3 = 15 \Rightarrow \boxed{A=5} \text{ et } \textcircled{1} \Rightarrow \boxed{C=4}. \text{ D'où}$$

$$\frac{9x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{x+2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{9x^2}{(x-1)^2(x+2)} dx = 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + 4 \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= 5 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + 4 \ln|x+2| + C$$

$$= \ln(|x-1|^5 (x+2)^4) - \frac{3}{x-1} + C$$

2. [5 points]

(1) [2 points] Déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non. Si vous dites qu'elle converge, trouver sa valeur et si vous dites qu'elle diverge, expliquer pourquoi.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

(2) [3 points] Utiliser le théorème de comparaison pour déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Solution (1) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{\ln(x)}{x} dx$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du \text{ et } \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \frac{u}{x} x du = \int u du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2. \text{ D'où}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 \right] = +\infty.$$

d'intégrale diverge

(2) Pour $0 < x < 1$, $x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ car $x < \sqrt{x}$ dans ce cas.

$$x + \sqrt{x} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x}} \leq \sqrt{2} x^{1/4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{\sqrt{2} x^{1/4}}{x^{1/3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{\sqrt{2}}{x^{1/12}} \text{ et alors } \int_0^1 \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{x^{1/12}} dx$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ converge (intégrale p), le Théorème de

Comparaison implique que $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx$ converge aussi.

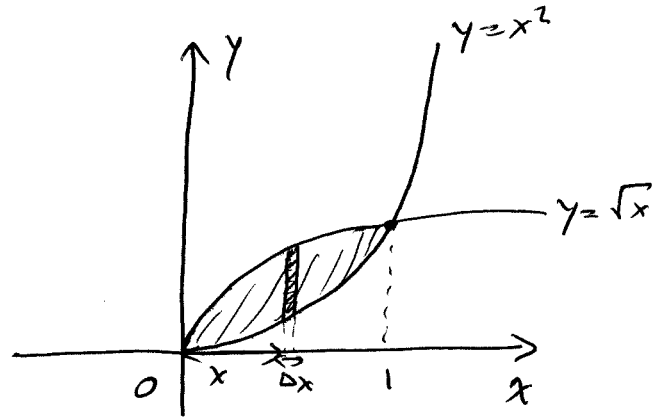
3. [4 points] Considérer la région limitée par les fonctions $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

(1) [2 points] Tracer la région et en trouver l'aire.

(2) [2 points] Trouver le volume du solide obtenu en tournant la région autour de l'axe Ox .

Solution (1) Aire = $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$



(2) Prenons une tranche verticale

dans la région à une distance x de Oy et d'épaisseur Δx . La rotation de cette tranche autour de l'axe Ox engendre un anneau



dont le volume est $\pi [R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2] \Delta x$

$$= \pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] \Delta x = \pi [x - x^4] \Delta x.$$

Le volume totale est alors

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3\pi}{10}$$

4. [3 points] Trouver la longueur de l'arc de la courbe $y = 2x^{\frac{3}{2}} + 1$ pour $0 \leq x \leq 1$.

$$y = 2x^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx, \text{ soit } u = 1 + 9x \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = 9 \Rightarrow dx = \frac{1}{9} du \Rightarrow \int \sqrt{1 + 9x} dx = \int \sqrt{u} \frac{1}{9} du =$$

$$\frac{1}{9} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow L = \left[\frac{2}{27} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (10)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27}$$

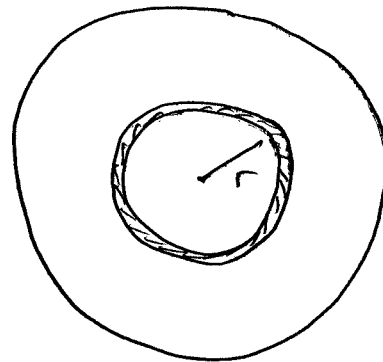
$$\approx 2.27$$

5. [4 points] Une plaque métallique très mince a la forme d'un cercle de rayon 1 mètre. La densité de la plaque à une distance r mètre du centre est donnée par $\rho(r) = \frac{1}{1+r^2} \text{ kg/m}^2$. Calculer la masse totale de la plaque.

Preions une tranche sous la forme d'un anneau d'épaisseur Dr à une distance r du centre du cercle.

La masse d'une telle tranche est

$$2\pi r Dr \cdot \frac{1}{1+r^2} = \frac{2\pi r}{1+r^2} Dr$$



La masse totale de la plaque est alors

$$M = \int_0^1 \frac{2\pi r}{1+r^2} dr = \pi \int_0^1 \frac{2r}{1+r^2} dr$$

$$u = 1+r^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{du}{2r} \Rightarrow \int \frac{2r}{1+r^2} dr = \int \frac{du}{u} =$$

$$\ln u = \ln(1+r^2) \text{ . Alors}$$

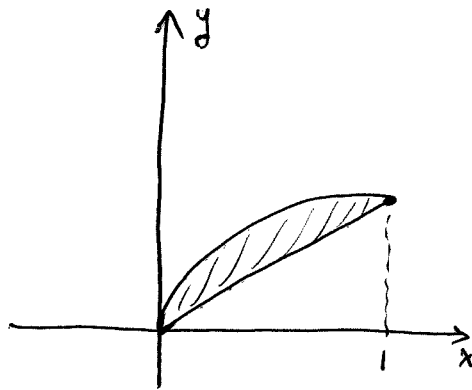
$$M = \pi \left[\ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln 2 \approx 2.178 \text{ kg}$$

6. [4 points] Une plaque métallique très mince et homogène (même densité partout) a la forme de la région du plan limitée par les courbes $y = x$ et $y = \sqrt{x}$. Trouver les coordonnées du centre de masse de cette plaque.

Solution d'aire de la région est

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx =$$

$$\left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}$$



les coordonnées du centre de masse

sont :

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x [\sqrt{x} - x] dx = \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 (x^{3/2} - x^2) dx =$$

$$6 \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 6 \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right] = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{1}{2} [(\sqrt{x})^2 - x^2] dx = 3 \int_0^1 (x - x^2) dx = 3 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 =$$

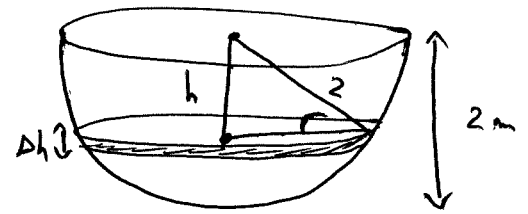
$$3 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Le centre de masse est alors le point $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right)$

7. [5 points] Un réservoir d'eau a la forme d'une coupe semi-sphérique (demi-sphère) ouverte vers le haut et de rayon 2 m. Si le réservoir est rempli d'eau (de densité 1000 Kg/m^3), trouver le **travail** nécessaire pour vider le réservoir en pompant toute l'eau par dessus bord du réservoir.

(Utiliser le fait que l'accélération due à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$)

Solution Prenons une tranche horizontale d'eau à une distance h du dessus bord et d'épaisseur Δh ,
le travail nécessaire pour pomper
cette tranche est alors



$$\pi r^2 \Delta h 1000 (9.8) h$$

$$= \pi (4 - h^2) \Delta h 9800 h = 9800 \pi (4h - h^3) \Delta h.$$

$$2^2 = h^2 + r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 - h^2$$

Le Travail total pour vider le réservoir est alors

$$T = \int_0^2 9800 \pi (4h - h^3) dh = 9800 \pi \left[2h^2 - \frac{h^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$9800 \pi [8 - 4] \approx 123150.4 \text{ J}$$

CALCUL II (MAT1722 C)
Examen Partiel (Automne 2011)

Prof. Joseph Khoury

durée: 80 minutes

NOM de famille: Soluhion

Prénom: _____

Numéro d'étudiant: _____

- Aucune note n'est permise.
- Seules Les calculatrices non programmables sont permises
- Cet examen comporte 6 questions et 9 pages
- Vous devez répondre à toutes les questions
- Toutes les questions sont à développement et valent un total de 28 points
- Prenez soin de bien rédiger vos solutions
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages additionnelles à la fin si vous manquez d'espace

1. [5 points]

(1) [3 points] Déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non. Si vous dites qu'elle converge, trouver sa valeur et si vous dites qu'elle diverge, expliquer pourquoi.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx.$$

(2) [2 points] Utiliser le théorème de comparaison pour déterminer si l'intégrale impropre suivante converge ou non.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 + x^8}}$$

Solution (1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du \text{ et alors}$$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \int \frac{1}{x u^3} x du = \int u^{-3} du = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(\ln x)^2} \right]_2^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2(\ln 2)^2} < +\infty. \text{ Alors } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx \text{ converge et sa}$$

$$\text{valeur est } \frac{1}{2(\ln 2)^2}.$$

(2) Pour $0 < x < 1$, $x^5 + x^8 \leq 2x^5 \Rightarrow \sqrt[4]{x^5 + x^8} \leq \sqrt[4]{2} x^{5/4}$

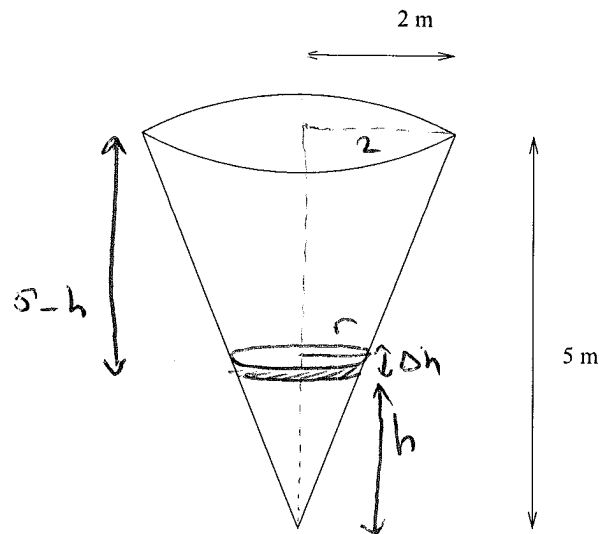
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 + x^8}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{x^{5/4}} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 + x^8}} dx \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int_0^1 \frac{1}{x^{5/4}} dx$$

Pour le Théorème de Comparaison

intégrale $p > 1$
divergente

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 + x^8}} dx \text{ diverge.}$$

2. [5 points] Un réservoir d'eau a la forme d'un cône circulaire régulier dont le rayon à la base est de 2 m et la hauteur est de 5 m:



Si le réservoir est rempli d'eau (de densité 1000 Kg/m^3), trouver le **travail** nécessaire pour vider le réservoir en pompant toute l'eau par dessus bord.

(Utiliser le fait que l'accélération due à la gravité est $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$)

Solution Prenons une tranche horizontale d'eau à une distance h m du fond et d'épaisseur Δh . Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est $dT = \pi r^2 \Delta h \cdot 1000 \cdot (9.8) \cdot (5-h)$

Pour les triangles semblables, on a: $\frac{r}{2} = \frac{h}{5} \Rightarrow r = \frac{2h}{5}$, d'où

$dT = \pi \frac{4}{25} h^2 \Delta h \cdot 9800 (5-h)$ et le travail total est alors

$$T = \int_0^5 \frac{4\pi}{25} 9800 (5h^2 - h^3) dh = \frac{4\pi(9800)}{25} \left[\frac{5}{3} h^3 - \frac{h^4}{4} \right]_0^5$$

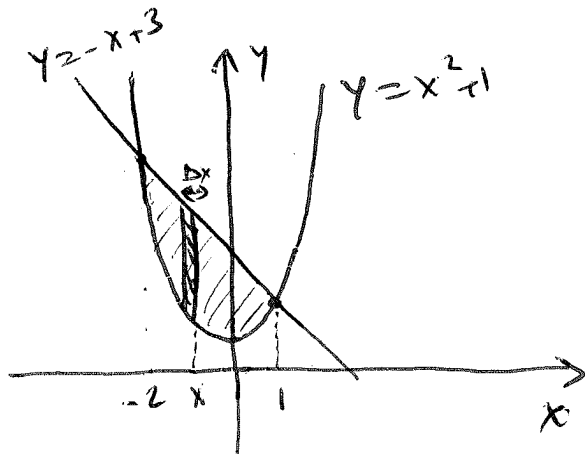
$$\approx 256556 \text{ J}$$

3. [5 points] Considérer la région limitée par les fonctions $y = x^2 + 1$ et $y = -x + 3$.

(1) [2 points] Tracer la région dans le plan et en trouver l'aire

(2) [3 points] Trouver le volume du solide obtenu en tournant la région autour de l'axe Ox

Solution (1) $x^2 + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$
 $\Rightarrow x = -2, x = 1$



$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-2}^1 [-x+3 - (x^2+1)] dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{4}{2} - \frac{4}{2} + 4 \right) \\ &= 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{48 - 2 - 3 - 16}{6} = \frac{4}{2} \end{aligned}$$

(2) Prenons une tranche verticale à une distance x de Oy et d'épaisseur Δx . La rotation de la tranche autour de Ox engendre un anneau dont le volume est

$$\begin{aligned} dV &= \pi [R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2] \Delta x = \pi [(-x+3)^2 - (x^2+1)^2] \Delta x \\ &= \pi [x^2 - 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1] \Delta x \\ &= \pi [-x^4 - x^2 - 6x + 8] \Delta x \end{aligned}$$

Le volume totale obtenu $V = \pi \int_{-2}^1 (-x^4 - x^2 - 6x + 8) dx$

$$= \pi \left[-\frac{1}{5} x^5 - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_{-2}^1 = \frac{117}{5} \pi$$

4. [3 points] Trouver la longueur de la courbe $y = 2x^{\frac{3}{2}} + 4$ pour $0 \leq x \leq 1$.

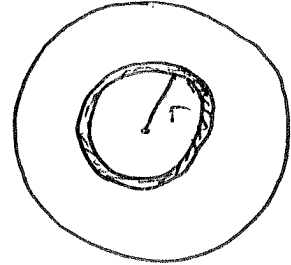
Solution $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx$

$$u = 1 + 9x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 9 \Rightarrow dx = \frac{1}{9} du \text{ et } L = \frac{1}{9} \int_1^{10} u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{9} \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_1^{10} = \frac{2}{27} \left[\sqrt{1000} - 1 \right] \approx 2.268$$

5. [4 points] Une plaque métallique mince et homogène a la forme d'un cercle de rayon 3 m. La densité du métal dépend de la distance du centre de la plaque. Pour un point situé à une distance r m du centre de la plaque, la densité est donnée par $\rho(r) = \frac{2}{1+r^2}$ kg/m². Trouver la masse totale de la plaque.

Solution Prenons un anneau centré au centre du cercle à une distance r et ayant une petite épaisseur Δr .



Si Δr est assez petite, la densité de

l'anneau est constante et sa masse est donnée par

$dM = \text{densité de l'anneau} \times \text{aire de l'anneau}$

$$= \frac{2}{1+r^2} 2\pi r \Delta r = \frac{4\pi r}{1+r^2} \Delta r$$

La masse totale est alors $M = \int_0^3 \frac{4\pi r}{1+r^2} dr = 2\pi \left[\ln(1+r^2) \right]_0^3$

$$= 2\pi [\ln 10] \approx 14.468 \text{ kg}$$

6. [6 points]

(1) [3 points] Utiliser la **méthode d'Euler** avec un pas de $h = 0.1$ pour estimer la valeur de $y(0.3)$ où y est la solution de l'équation différentielle avec condition initiale:

$$y' = x^2 + x^2 y^2, \quad y(0) = 1.$$

Arrondir vos réponses à 4 chiffres après la virgule.

(2) [3 points] Utiliser la méthode de **séparation des variables** pour résoudre l'équation différentielle donnée à la partie (1). Utiliser votre réponse pour donner la valeur de $y(0.3)$ arrondie à 4 chiffres après la virgule.

Solution (1) Ici $F(x, y) = x^2 + x^2 y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$

$$x_1 = x_0 + h = 0.1, \quad y_1 = y_0 + h F(x_0, y_0) = 1 + 0.1 [0^2 + 0^2 \cdot 1^2] = 1.$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.2, \quad y_2 = y_1 + h F(x_1, y_1) = 1 + 0.1 [0.1^2 + 0.1^2 (1)^2] = 1.02$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.3, \quad y_3 = y_2 + h F(x_2, y_2) = 1.02 + 0.1 [0.2^2 + 0.2^2 (1.02^2)] \\ = 1.0400$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = x^2(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = x^2 dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int x^2 dx$$

$$\Rightarrow \text{Arc tan } y = \frac{1}{3} x^3 + C \Rightarrow y = \tan\left(\frac{1}{3} x^3 + C\right)$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \tan C \Rightarrow C = \pi/4$$

$$\text{D'où } y = \tan\left(\frac{1}{3} x^3 + \pi/4\right) \text{ . Alors}$$

$$y(0.3) = \tan\left(\frac{1}{3} \cdot 0.3^3 + \pi/4\right) = 1.0182$$