Problèmes de pratique-Applications des intégrales, Calcul de la masse totale

1. Trouver la masse d'une feuille rectangulaire dont les dimensions sont $3\,m$ et $5\,m$ et dont la densité à une distance x mètres de l'un des côtés de longueur 5 est égale à $\frac{x}{1+x^4}\,kg/m^2$.

2. La densité du pétrole d'une nappe circulaire à la surface de l'océan à une distance r mètres du centre de la nappe est donnée par $\rho(r) = \frac{50}{(1+r)}\,kg/m^2$. Si la nappe de pétrole s'étend de $r = 0$ à $r = 10000\,m$, trouver une somme de Riemann permettant de donner une approximation de la masse totale de la nappe de pétrole. Transformer votre somme de Riemann en une intégrale définie pour calculer la valeur exacte de la masse. À quelle distance du centre de la nappe la moitié de la masse est-elle contenue?

3. Une tige mince d'une longueur de 2 m et d'une densité de $\delta(x) = 3 - e^{-x}$ kg/m est placée sur l'axe des x et ses extrémités se trouvent en $x = \pm 1$. Le centre de masse de la tige se trouvera-t-elle à droite ou à gauche de l'origine? Trouver la masse totale de la tige et la coordonnée de son centre de masse.

4. une plaque métalique a la forme d'un triangle dans le plan et dont les sommets se trouvent aux point $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ et $C(0, -\beta)$ (α, β sont deux constantes positives). Si la plaque est homogène (la densité est la même en chaque point), montrer que le centre de masse est indépendant de la valeur de β.

5. Un entrepôt a la forme d'un demi-cylindre de rayon r et de longueur l. L'entrepôt est rempli de bran de scie dont la densité en tout point est proportionelle à la distance de ce point à partir du sol. La constante de proposrtionnalité est k. Calculer la masse totale de bran de scie dans l'entrepôt.

6. Selon on modèle exponentiel pour la densité de l'atmoshpère de la Terre, si la température de l'atmoshpère était constante, alors la densité de l'atmoshpère en fonction de la hauteur h (en mètres) au dessus de la surface de la Terre serait donnée par

$$\rho(h) = 1,28e^{0,000124h}\,Kg/m^3.$$

   Trouver la masse de la portion de l'atmoshpère autour de la Terre entre $h = 0$ et $h = 100$ m. Supposer que le rayon de la Terre est de 64.10^7 m.

MAT 1722 - Problèmes suggérés sur la longueur d'arc

[1] Trouver la longueur de chacun des arcs des courbes :

(1) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$; $0 \leq t \leq \pi$

(2) $x = e^t + e^{-t}$, $y = 5 - 2t$; $0 \leq t \leq 3$

(3) $x = y^{3/2}$; $0 \leq y \leq 1$

(4) $x = a \sin\theta$, $y = b \cos\theta$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

où a, b sont des constantes positives (non nulles)

MAT 1722 - Solutions des problèmes suggérés sur les volumes

1 Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par les courbes données autour de la droite indiquée. Dessinez la région plane.

(a) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 1$; autour de l'axe OX.

(b) $x = y - y^2$, $x = 0$; autour de l'axe OY

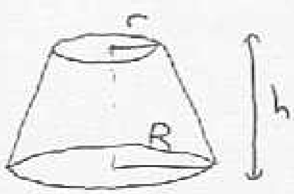
(c) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/4$; autour de l'axe OX

(d) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$; autour de l'axe OY

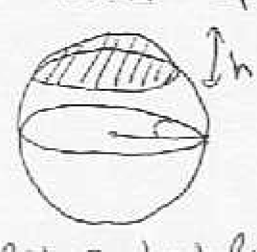
(e) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; autour de l'axe $x = 1$.

(f) $x = y^3$, $x = 4y$; autour de l'axe $y = 2$.

2 Un tronc de cône circulaire droit de hauteur h, dont le rayon de la base inférieure mesure R et celui de la base supérieure mesure r



3 Calculer le volume d'une calotte sphérique de rayon r, hauteur h

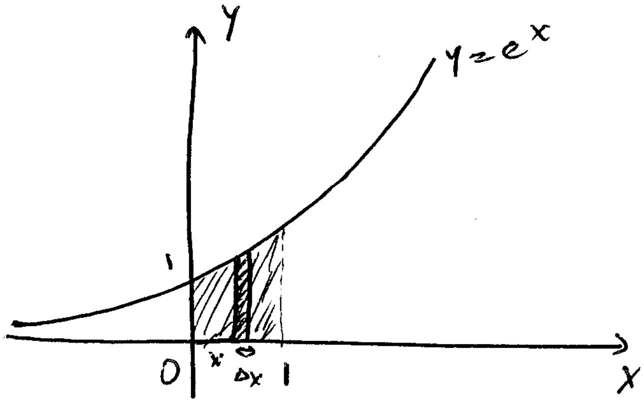


4 Trouver le volume d'un solide S dont la base est le triangle de sommets (0,0), (2,0) et (0,1) et dont les sections perpendiculaires à l'axe OY sont des demi-cercles.

MAT1722 - Solutions des Problèmes suggérés - Volumes -

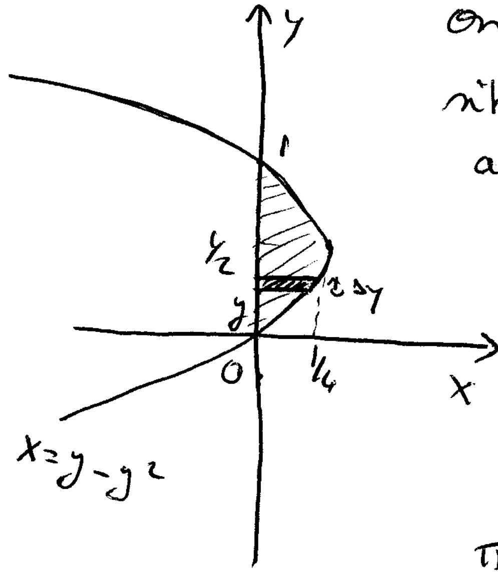
1

(a) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, autour de l'axe OX



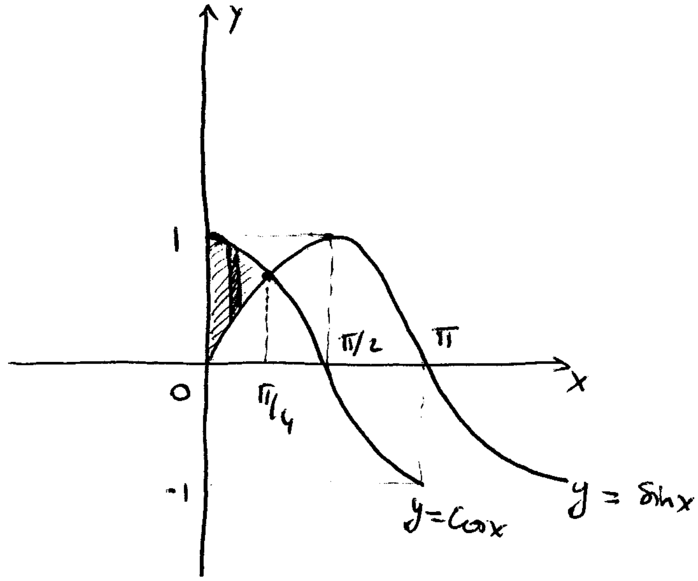
On tranche la région perpendiculairement à l'axe OX, c'est-à-dire, on prend des tranches verticales. La rotation d'une telle tranche située à une distance x de l'origine, produit un petit cylindre de hauteur Δx. Le volume d'un tel cylindre est $\pi y^2 \Delta x = \pi (e^x)^2 \Delta x$. Le volume cherché est alors $\int_0^1 \pi e^{2x}\,dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

(b). $x = y - y^2$, $x = 0$, autour de l'axe OY.



On prend une tranche horizontale située à une distance y de l'origine, avec épaisseur Δy. Le volume du cylindre engendré par la rotation de cette tranche est donné par
$$\pi x^2 \Delta y = \pi (y - y^2)^2 \Delta y.$$
D'où le volume total est
$$\pi \int_0^1 (y - y^2)^2\,dy = \pi \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^4 + \frac{1}{5} y^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}.$$

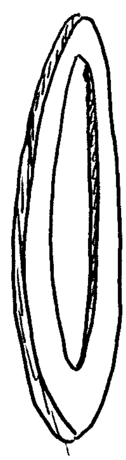
(c) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/4$, autour de l'axe Ox :



On tranche la région perpendiculairement à l'axe Ox. La rotation d'une tranche verticale située à une distance x de l'origine autour de Ox donne un anneau de rayon extérieur $\cos x$ et de rayon intérieur $\sin x$.

Le volume d'un tel anneau est $\pi\left[\cos^2 x - \sin^2 x\right]\Delta x$.

Le volume cherché est alors

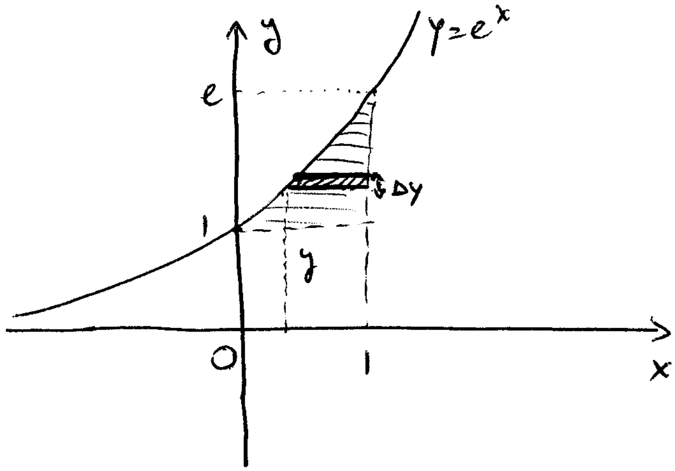


$$\pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx =$$

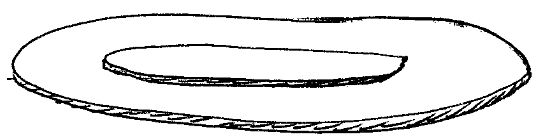
$$\pi \int_0^{\pi/4} (2\cos^2 x - 1)\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\sin(2x)\right]_0^{\pi/4} = \pi/2\left[\sin(\pi/2) - \sin 0\right]$$

$$= \pi/2 .$$

(d) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$; autour de l'axe Oy



La rotation d'une tranche horizontale située à une distance y de l'origine et d'épaisseur Δy produit un anneau dont le rayon extérieur est 1 et le rayon intérieur est $x = \ln y$



Le volume d'un tel anneau est alors $\pi\left[1^2 - (\ln y)^2\right]\Delta y$.

Le volume cherché est alors $\displaystyle\int_1^e \pi(1 - \ln^2 y)\,dy = \pi\int_1^e dy - \pi\int_1^e \ln^2 y\,dy$

Pour $\displaystyle\int (\ln y)^2\,dy$, procédons par parties :

$$u = (\ln y)^2 \quad , \quad dv = dy \Rightarrow du = \frac{2(\ln y)}{y}\,dy \quad , \quad v = y$$

$$\int (\ln y)^2\,dy = y(\ln y)^2 - \int y\,\frac{2(\ln y)}{y}\,dy = y(\ln y)^2 - 2\int \ln y\,dy .$$

Pour $\displaystyle\int \ln y\,dy$, on procède par parties de nouveau :

$$u = \ln y \quad , \quad dv = dy \Rightarrow du = \frac{1}{y}\,dy \quad , \quad v = y$$

$\Rightarrow \int \ln y \, dy = y \ln y - \int y \frac{1}{y} dy = y \ln y - y .$

D'où $\int (\ln y)^2 dy = y(\ln y)^2 - 2y\ln y + 2y \Rightarrow \int_1^e (\ln y)^2 dy =$

$\left[y(\ln y)^2 - 2y\ln y + 2y \right]_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$

Le volume est alors $\pi \int_1^e dy - \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy =$

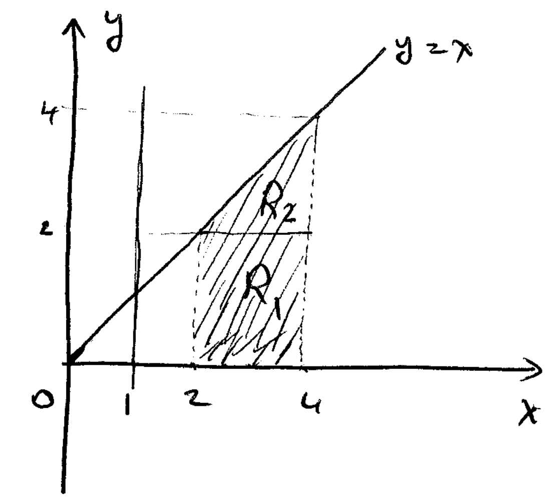
$$\pi (e-1) - \pi (e-2) = \pi .$$

(e) $y = x , y = 0, x = 2, x = 4$; autour de $x = 1$

La région plane en question peut être divisée en deux sous-régions

R_1 : $y = 2, x = 2, x = 4, y = 0$

R_2 : $y = x, y = 2, x = 2, x = 4$.



. Le volume du solide obtenu en tournant R_1 autour de $x = 1$ est

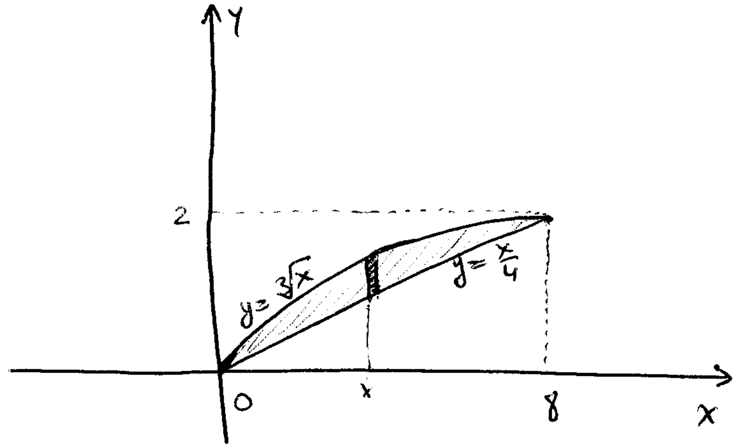
$$\pi \int_0^2 (3^2 - 1^2) dy = \pi \int_0^2 8 \, dy = 16\pi$$

- Le volume du solide obtenu en tournant R_2 autour de $x = 1$ est

$$\pi \int_2^4 [3^2 - (y-1)^2] dy = \pi \left[9y \right]_2^4 - \frac{\pi}{3} \left[(y-1)^3 \right]_2^4 = \frac{28\pi}{3}$$

Le volume total est alors $16\pi + \frac{28\pi}{3} = \frac{76\pi}{3}$.

(f)



Commençons par trouver les points d'intersection de 2 courbes :

$$\sqrt[3]{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{x^3}{64} \Rightarrow x^3 - 64x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 8.$$

Donc, dans le premier quadrant, les points d'intersection sont $x=0, 8$.

Tronchons la région perpendiculairement à $y=2$.

Le volume du solide obtenu par la rotation d'une tranche est

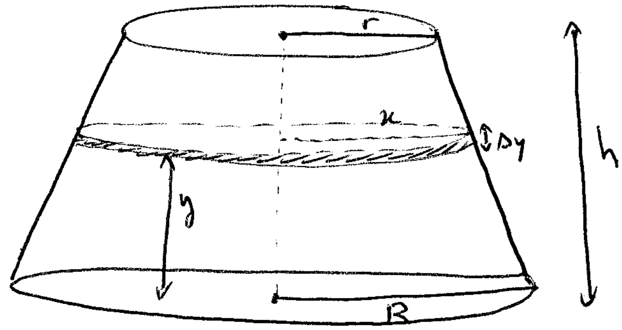
$$\pi\left(R_{ext}^2 - R_{int}^2\right)\Delta x = \pi\left[\left(2-\frac{x}{4}\right)^2 - \left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2\right] = \pi\left[-x + \frac{x^2}{16} + 4\sqrt[3]{x} - x^{2/3}\right]\Delta x$$

Le volume total est alors

$$\pi\int_0^8\left(-x + \frac{x^2}{16} + 4\sqrt[3]{x} - x^{2/3}\right)dx = \pi\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{48} + 4\,\frac{3}{4}\,x^{4/3} - \frac{3}{5}\,x^{5/3}\right]_0^8$$

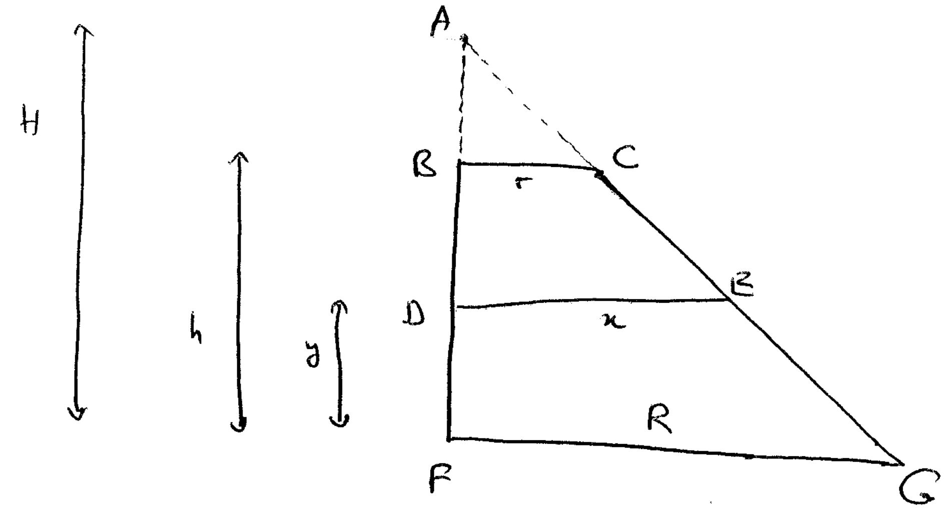
$$\pi\left[-32 + \frac{32}{3} + 48 - \frac{96}{5}\right] = \frac{112}{15}\pi$$

2



Prenons une tranche horizontale à une distance y de la base et d'épaisseur Δy. Le volume d'une telle tranche est $\pi x^2 \Delta y$

Pour exprimer x en fonction de y, on "complète" le cône pour obtenir les 3 triangles semblables suivants:



On a: $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow rH = RH - Rh \Rightarrow H = \frac{Rh}{R-r}$

D'autre part, $\frac{r}{x} = \frac{H-h}{H-y} \Rightarrow x = \frac{r(H-y)}{H-h} = \frac{r\left(\frac{Rh}{R-r} - y\right)}{\frac{Rh}{R-r} - h}$

$$\Rightarrow x = \frac{Rh - Ry + yr}{h} = R - \frac{(R-r)}{h} y .$$

Le volume de la tranche est alors $\pi \left(R - \frac{(R-r)}{h} y\right)^2 \Delta y$ et le volume total du solide est

$$V = \pi \int_0^h \left(R - \left(\frac{R-r}{h}\right) y\right)^2 dy = \pi \int_0^h \left[R^2 + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^2 - 2\,\frac{R(R-r)}{h} y\right] dy$$

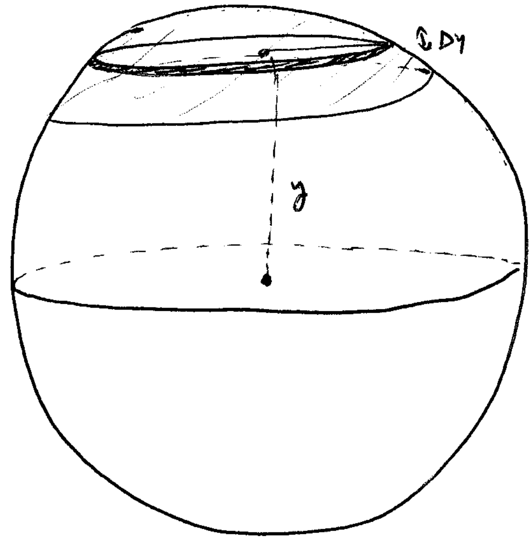
$$= \pi \left[R^2 y + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^3 - \frac{R(R-r)}{h} y^2\right]_0^h = \pi\left[R^2 h + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 h^3 - \frac{R(R-r)}{h} h^2\right]$$

$$= \pi\left[R^2 h + \frac{1}{3}(R-r)^2 h - R(R-r)h\right] =$$

$$\pi\left[\cancel{R^2 h} + \frac{1}{3}R^2 h - \cancel{\frac{2}{3}Rrh} + \frac{1}{3}r^2 h - \cancel{R^2 h} + \cancel{Rrh}\right] = \pi\left[\frac{1}{3}R^2 h + \frac{1}{3}Rrh + \frac{1}{3}r^2 h\right] =$$

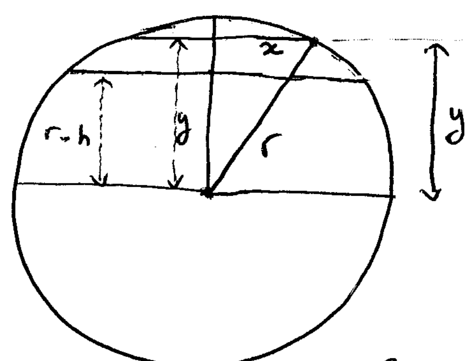
$\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$

3



Prenons une tranche horizontale dans la calotte située à une distance y du centre et d'épaisseur Δy. Appelons x le rayon de cette tranche. Le volume de cette tranche est $\pi x^2 \Delta y$. Pour exprimer x en fonction de y, on considère le diagramme suivant

Par le Théorème de Pythagore, on a :



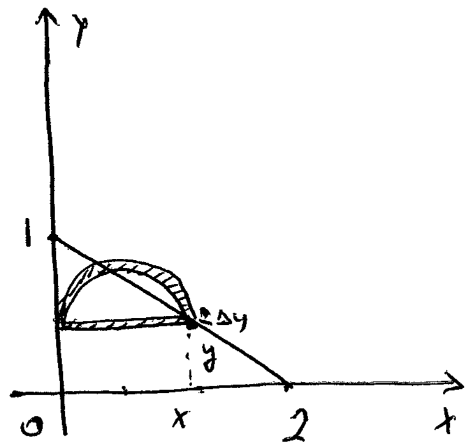
$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Le volume de la tranche est $\pi (r^2 - y^2)\Delta y$, et le volume total est alors

$$\int_{r-h}^{r} \pi (r^2 - y^2)\, dy = \pi \left[r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{r-h}^{r} =$$

$$\pi \left[r^3 - \frac{1}{3} r^3 - r^2 (r-h) + \frac{1}{3}(r-h)^3 \right] = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$$

$\boxed{4}$



(8)

Prenons une section perpendiculaire à l'axe Oy.

Le rayon du semi-cercle est donné par $\frac{x}{2}$.

L'équation de la droite passant par $(0,1)$ et $(2,0)$ est donnée par : $\frac{y-1}{x-0} = \frac{0-1}{2-0} \Rightarrow$

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+1 \text{ , d'où}$$

$$x = -2(y-1)$$

Le volume d'une tranche est $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Delta y = \frac{1}{2}\pi\left[-(y-1)\right]^2 \Delta y$

$$= \frac{\pi}{2}(y-1)^2 \Delta y$$

Le volume total du solide est alors

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2}(y-1)^2 dy = \frac{\pi}{2}\left[\frac{(y-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

MAT 1722 - Problèmes suggérés - Séries de Taylor et MacLaurin

1 Utiliser la définition de la série de MacLaurin pour donner la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \sin(2x)$. Déterminer aussi le rayon de convergence de cette série

2 Donner la série de Taylor de $f(x)$ en la valeur donnée du centre a.

(1) $f(x) = e^x$, $a = 3$ (2) $f(x) = \ln x$, $a = 2$

(3) $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$

3 Utiliser les séries de MacLaurin de base pour donner la série de MacLaurin de chacune des fonctions. Déterminer aussi l'intervalle de convergence.

(1) $f(x) = e^{3x}$ (2) $f(x) = x^2 \cos x$ (3) $f(x) = \cos(x^3)$

(4) $f(x) = x \sin(x/2)$ (5) $f(x) = xe^{-x}$ (6) $f(x) = \sin^2 x$

4 Utiliser des séries pour calculer chacune des limites:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

5 Écrivez les 3 premiers termes non nuls de la série de MacLaurin de chaque fonction: (1) $y = e^{-x^2}\cos x$ (2) $y = e^x \ln(1-x)$

6 Calculer la somme de chacune des séries

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

MAT 1722 - Solutions des problèmes suggérés - Séries de Taylor et Maclaurin

$\boxed{1}$ $f(x) = \sin(2x)$. Utilisons la définition du série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

$f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(x) = 2\cos(2x) \Rightarrow f'(0) = 2$

$f''(x) = -4\sin(2x) \Rightarrow f''(0) = 0$, $f'''(x) = -8\cos(2x) \Rightarrow f'''(0) = -8$

$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(x) = 32\cos(2x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = 32$.

On voit que $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 2^{(2n+1)}$

D'où $\sin(2x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{(2n+1)}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + \frac{2^5 x^5}{5!} - \dots$

Trouvons l'intervalle de convergence:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{2^{(2n+3)}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n 2^{(2n+1)} x^{2n+1}} \right| =$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$ pour tout x $(\neq 0)$. Alors la série converge pour tout x. L'intervalle de convergence est $]-\infty, +\infty[$ et le rayon de convergence est $+\infty$.

Remarque on sait que $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

$\Rightarrow \sin(2x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty < x < +\infty$.

2 (1) $f(x) = e^x$, $a = 3$. La série de Taylor de e^x centrée en $a = 3$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$. ②

Mais pour tout n, $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(3) = e^3$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Autre méthode on sait que la série de Maclaurin de e^x est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $-\infty < x < +\infty$. Comme $e^x = e^{x-3} e^3$, on a :

$$e^x = e^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2). $f(x) = \ln x$, $a = 2$. $f(a) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} = (-1)^{1+1}\frac{0!}{2^1}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{2^2} = (-1)^{2+1}\frac{1!}{2^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(2) = \frac{2}{2^3} = (-1)^{3+1}\frac{2!}{2^3}$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(2) = -\frac{6}{2^4} = (-1)^{4+1}\frac{3!}{2^4}$

En général, $f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2^n} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}$ pour $n \geq 1$

$$\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}(x-2)^n$$

Trouvons l'intervalle de convergence :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}} \cdot \frac{n\,2^n}{(-1)^{n+1}(x-2)^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)}|x-2| = \frac{|x-2|}{2}$$

La série converge si $\frac{|x-2|}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

$\underline{x=0}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-2)^n}{n2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$: diverge (série $p=1$)

$\underline{x=4}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$: série alternée convergente.

D'où, $\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}(x-2)^n$, $0 < x \leq 4$

(3) $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$

$\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En général, $f^{(n)}(\pi/4) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{2}\, n!}(x-\pi/4)^n$ et l'intervalle de convergence est $]-\infty, +\infty[$

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = e^{3x}$. On sait que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; $-\infty < x < +\infty$

$$\Rightarrow e^{3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$$

(2) $f(x) = x^2 \cos x = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; -\infty < x < +\infty$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}, \; -\infty < x < +\infty$$

(3) $f(x) = \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}, \; -\infty < x < +\infty$

(4) $f(x) = x \sin(x/2) = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; -\infty < x < +\infty$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)!}, \; -\infty < x < +\infty$$

(5) $f(x) = xe^{-x} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}, \; -\infty < x < +\infty$

(6) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!\, 2}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \; -\infty < x < +\infty$$

$\boxed{4}$ (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \text{Arctg}\, x}{x^3}$. Écrivons tout d'abord la série de MacLaurin de $\text{Arctg}\, x$:

$$\text{Arctg}\, x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n\,dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \quad , -1<x<1$$

$x=0$, $\text{Arctg}\, 0 = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\text{Arctg}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , -1<x<1$$

$\underline{x=-1}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$: Converge (Test des séries alternées)

$\underline{x=1}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: Converge (test des séries alternées)

D'où $\text{Arctg}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{7}x^7 + \dots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{Arctg}\, x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - x^3/3 + x^5/5 - 1/7\, x^7 + \dots)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 - x^5/5 + x^7/7 - \dots}{x^3} = \lim_{x\to 0} (1/3 - x^2/5 + x^5/7 - \dots)$$

$$= 1/3$$

(6)

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)}{1+x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-\cdots}{-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-\cdots}{-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}x-\frac{1}{4!}x^2-\cdots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2!}}{-\frac{1}{2!}} = -1$$

(3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-x^3/3!+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5!}-\frac{x^2}{7!}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

5 (1) $$y = e^{-x^2}\cos x = \left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\right)$$

$$= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{24}+\frac{x^4}{2}-\cdots$$

$$= 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\cdots$$

(2) $y = e^x \ln(1-x)$

On a : $$\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\int \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int x^n\,dx$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$. Comme $\ln(1-x)\big|_{x=0} = 0$, $C=0$.

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$e^x \ln(1-x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x^3}{2} - \cdots - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

$$= -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \cdots$$

$\boxed{6}$ (1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x^4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^4)^n}{n!} = e^{-x^4}$$

Car $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout x.

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\pi/6)^{2n}}{(2n)!} = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[Car $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$]

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[Car $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$]

(4) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!} - x - x^4 = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} - x - x^4 = x e^{x^3} - x - x^4$$

(5) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

$$-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = -1 + e^x$$ pour tout x

MAT1722 - Problèmes suggérés sur la notion du travail

[1] Un travailleur sur un échafaudage de 75 pi de hauteur doit faire monter un seau de ciment de 500 lb jusqu'à un point situé à 30 pi du sol au moyen d'une corde pesant 5 lb/pi. Quelle quantité du travail faut-il pour accomplir cette tâche ?

[2] Un poids de 1000 lb est hissé à une hauteur de 10 pi. On le hisse à l'aide d'une corde qui pèse 4 lb/pi et qui est tirée par des ouvriers. Ceux-ci se tiennent debout sur un toit à une hauteur de 30 pi du sol. Trouver le travail accompli pour soulever le poids.

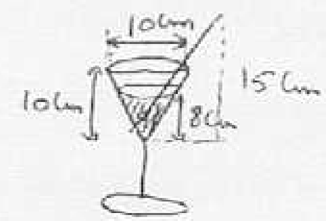
[3] Un réservoir d'eau rectangulaire a une longueur de 20 pi, une largeur de 10 pi et une profondeur de 15 pi. Si le réservoir est plein, quelle quantité de travail faut-il pour le vider en pompant toute l'eau à l'extérieur du réservoir ? (densité de l'eau = 62.4 lb/pi^3).

[4] Un réservoir a la forme d'un cylindre circulaire droit, une hauteur de 20 pi et un rayon de 6 pi. Si le réservoir est rempli d'eau à moitié, trouver le travail requis pour pomper toute l'eau par dessus bord du réservoir.

[5] Un réservoir de mazout de forme cylindrique est enfoui de telle sorte que son extrémité supérieure circulaire se trouve à 10 pi sous le sol. Le réservoir a un rayon de 5 pi, une hauteur de 15 pi. Le niveau de mazout actuel n'est que de 6 pi de profondeur. Calculer le travail à effectuer pour pomper tout le mazout à la surface. La densité du mazout étant de 50 lb/pi^3.

6 Une station-service stocke toute son essence dans un réservoir souterrain. Celui-ci est un cylindre couché horizontalement sur le côté (en d'autres mots, le réservoir n'est pas placé verticalement sur l'une de ses extrémités plats). Si le rayon du cylindre est de 4 pi, sa longueur est de 12 pi et que son extrémité supérieure est enfouie à 10 pi sous la terre, trouver la quantité totale du travail nécessaire pour pomper le pétrole à l'extérieur du réservoir (le pétrole pèse 42 lb/pi^3).

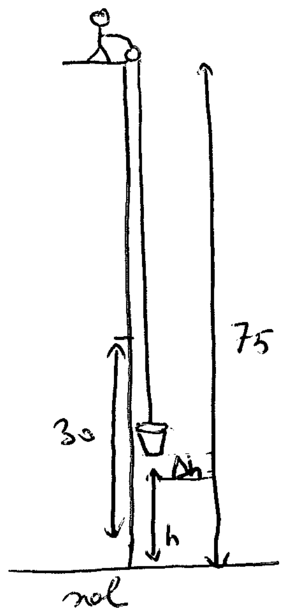
7 Par un après-midi chaud à Ottawa, Joseph tente de se rafraîchir en buvant à petites gorgées un verre de limonade glacé (voir figure pour les dimensions). Quelle quantité de travail faut-il pour vider le verre? La densité du limonade est de 1.2 g/cm^3. Au départ, le verre est rempli à une profondeur de 8 cm. À noter que la force (en dynes) provoquée par la gravité qui agit sur 1 g est de 980 dynes et que, dans ces unités de mesure, le travail est mesuré en ergs.



8 Un réservoir d'eau a la forme d'une demi-sphère de rayon 4 m. Trouver le travail nécessaire pour vider le réservoir en pompant toute l'eau d'un point situé à 2 m au-dessus du bord du réservoir (densité de l'eau = 1000 kg/m^3, force due à la gravité = 9.8 m/sec^2)

MAT1722 - Solutions des problèmes suggérés - Notion du travail

1



Supposons que le seau est à une distance h $(0 \leq h \leq 30)$ du sol et qu'on veut le soulever à partir de cette hauteur d'une très petite distance Δh. Le travail nécessaire est

$dT = F \times \Delta h$. Ici la force F est égale à la somme du poids du seau et la partie de la cable entre le travailleur et le seau : $F = 500 + 5(75 - h)$
$= (875 - 5h)$ lb

$dT = (875 - 5h)\,\Delta h$.

Si on subdivise la distance de 30 pi en n sous-intervals égaux de longueur Δh chacun, on obtient une approximation du travail avec une somme de Riemann :

$$T \simeq \sum_{i=1}^{n} (875 - 5h_i)\,\Delta h \text{. Lorsque } n \to +\infty$$

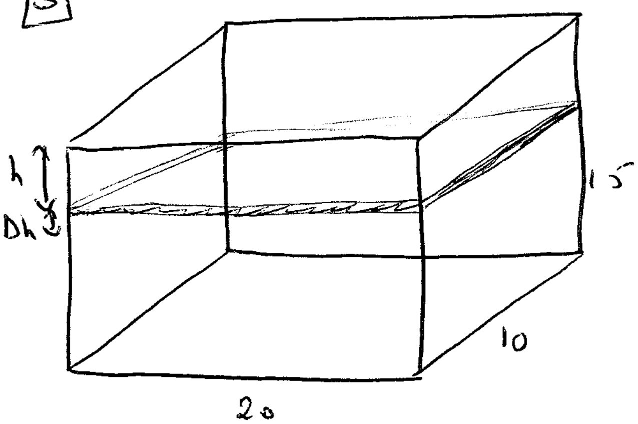
$$T = \int_0^{30} (875 - 5h)\,dh = \left[875h - \frac{5}{2}h^2\right]_0^{30} =$$

2 Comme dans l'exercice **1**, le travail en question peut être exprimé par l'intégrale définie :

$$T = \int_0^{10} [1000 + 4(30 - h)]\,dh = \int_0^{10} (1120 - 4h)\,dh =$$

$$\left[1120h - 2h^2\right]_0^{10} = 11200 - 2(10^2) = 11000 \text{ lb-pi}$$

3



Le travail nécessaire pour pomper une tranche horizontale d'eau située à une profondeur h et ayant une épaisseur Δh est $dT =$ (poids de la tranche) $\times h$

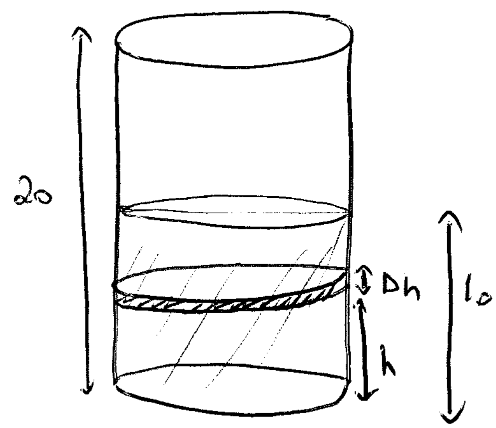
$= $ Volume de la tranche $\times$ densité $\times h$

$$= 20 \times 10 \times \Delta h \times 62.4\, h = 12480\, h\, \Delta h$$

Le travail total est alors $T = \displaystyle\int_0^{15} 12480 h\, dh = \left[12480 \frac{h^2}{2}\right]_0^{15}$

$$= 6240\left[h^2\right]_0^{15} = 1404000 \text{ lb-pi}$$

4



Prenons une tranche horizontale à une distance h de la base et d'épaisseur Δh. Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est

$$dT = \pi\, 6^2\, \Delta h\, (62.4)(20 - h)$$

Si on prend n tranches dans le cylindre, on obtient une approximation du travail total par une somme de Riemann :

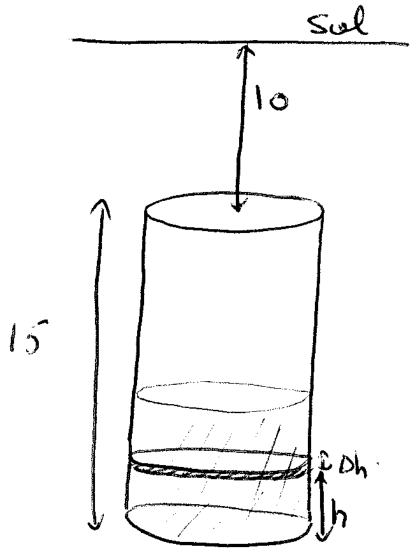
$$T \simeq \sum_{i=1}^{n} \pi (36)(62.4)(20 - h_i)\, \Delta h$$

Si $n \to +\infty$, cette somme devient une intégrale définie dont la valeur est le travail nécessaire pour vider le cylindre :

$$T = \int_0^{10} \pi(36)(62.4)(20-h)\,dh = 36\pi(62.4)\left[20h - \frac{h^2}{2}\right]_0^{10}$$

$$= 36\pi(62.4)(200-50) = 1058591.061 \text{ lb-pi}$$

5



Prenons une tranche horizontale du mazout à une distance h du fond et d'épaisseur Δh. Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est

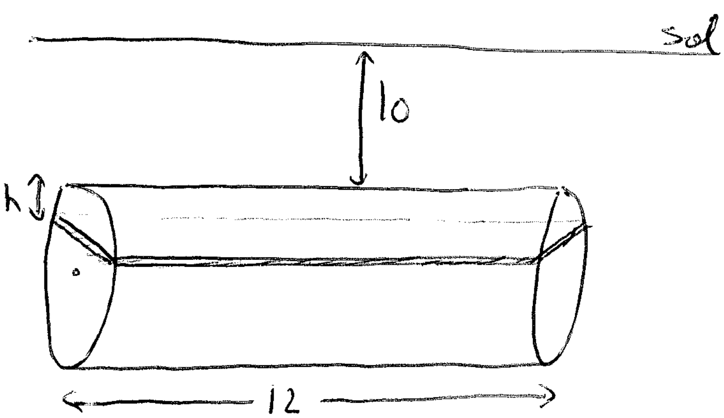
$dT = \pi r^2 \Delta h\,(50)\cdot(25-h)$. Le travail total est alors

$$T = \int_0^6 \pi r^2 (50)(25-h)\,dh =$$

$$\pi\, 25(50)\left[25h - \frac{h^2}{2}\right]_0^6 =$$

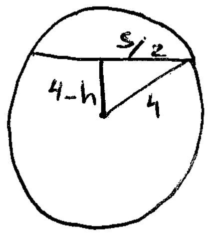
$$1250\pi\,[150-18] = 518362.78 \text{ lb-pi}$$

6



Prenons une tranche horizontale du pétrole à une distance h de l'extrémité supérieure du

Cylindre et d'épaisseur Δh. Le volume d'une telle tranche est $12\, s\, \Delta h$ et son poids est $12\, s\, \Delta h\, 42$. Exprimons maintenant s en fonction de h:



$$16 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (4-h)^2 \Rightarrow \frac{s^2}{4} = 16 - (4-h)^2$$

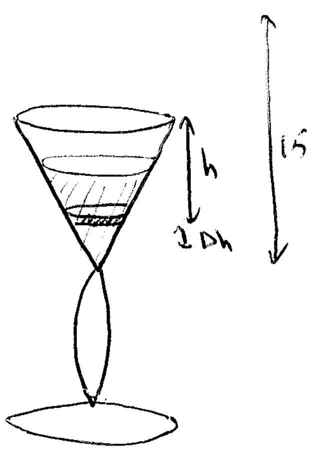
$$\Rightarrow s^2 = 4\left[-h^2 + 8h\right] \Rightarrow s = 2\sqrt{-h^2+8h}$$

Le travail pour pomper cette tranche est

$$dT = 12\left(2\sqrt{-h^2+8h}\right)\Delta h\, 42\,(h+10) = 1008\,(h+10)\sqrt{-h^2+8h}\,\Delta h$$

Le travail total est alors $T = \displaystyle\int_0^8 1008(h+10)\sqrt{-h^2+8h}\, dh = 354673.24$ lb-pi

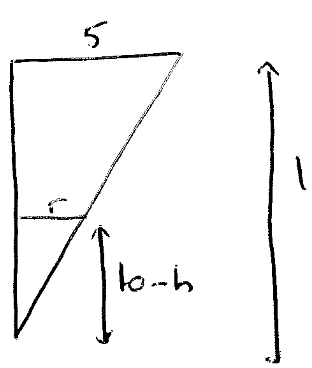
$\boxed{7}$



Prenons une tranche du vin à une distance h de l'extrémité supérieure du verre et d'épaisseur Δh. Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est

$$dT = \pi r^2 \Delta h\,(1.2)\,980\,(h+5).$$

Exprimons r en fonction de h:



$$\frac{r}{5} = \frac{10-h}{10}$$

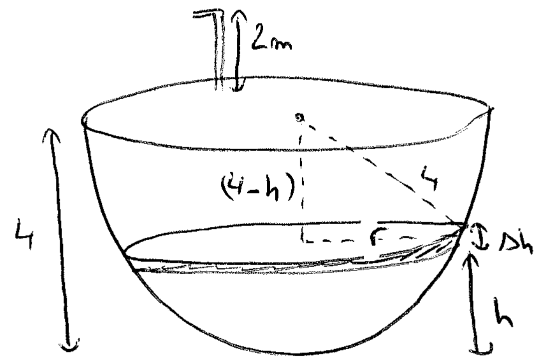
$$r = \frac{10-h}{2}$$

$$= 5 - \frac{h}{2}$$

Le travail total pour vider le verre est:

$$T = \int_2^{10} \pi \left(5-\frac{h}{2}\right)^2 (1.2)\, 980\, (h+5)\, dh = 1418693 \text{ ergs}$$

$\boxed{8}$



Prenons une tranche horizontale à une distance h du fond du réservoir et d'épaisseur Δh. Le travail nécessaire pour pomper cette tranche est

$\pi r^2 \Delta h (1000)(9.8)(6-h)$. Il faut exprimer r en fonction de h: $4^2 = (4-h)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 16-(4-h)^2 = -h^2+8h$

Le travail total est alors

$$\int_0^4 \pi(-h^2+8h)\, 9800\, (6-h)\, dh = 9800\pi \int_0^4 (h^3-14h^2+48h)\, dh$$

$$= 9800\pi \left[\frac{h^4}{4} - \frac{14}{3}h^3 + 24h^2\right]_0^4 \simeq 4597616.13 \text{ J}.$$