MAT1722 - Problèmes suggérés - Équation logistique

[1] Montrer que la solution de l'équation logistique $\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{L}\right)$ est donnée par $P = \frac{L}{1+Ae^{-kt}}$, $A = \frac{L-P_0}{P_0}$

[2] On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

(a) Écrivez une équation différentielle satisfaite par y. Cette équation est-elle logistique ?

(b) Résolvez cette équation.

(c) Une petite ville compte 1000 habitants. À 8h du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville était au courant. Quand est-ce que 90 % de la population saura ?

[3] Des biologistes ont empoissonné un lac de 400 unités et estiment que la capacité maximale de ce lac pour cette espèce est de 10000 unités. Le nombre de poissons a triplé durant la première année.

(a) Chercher une expression de l'effectif de la population après t années si cette population est conforme au modèle logistique

(b) Combien de temps faudra-t-il pour qu'il y ait 5000 poissons dans le lac ?

$\boxed{1}$ $\dfrac{dP}{dt} = kP\left(1-\dfrac{P}{L}\right) \Rightarrow \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{k}{L}P(L-P) \Rightarrow \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{k}{L}P(P-L)$

$$\frac{dP}{P(P-L)} = -\frac{k}{L}\,dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P(P-L)} = \int -\frac{k}{L}\,dt$$

Pour $\displaystyle\int \frac{dP}{P(P-L)}$, on procède par la méthode des fractions

partielles :

$$\frac{1}{P(P-L)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P-L} = \frac{(A+B)P - AL}{P(P-L)} \Rightarrow A = -\frac{1}{L},\ B = \frac{1}{L}$$

et $\displaystyle\frac{1}{P(P-L)} = \frac{-1/L}{P} + \frac{1/L}{P-L} \Rightarrow \int \frac{1}{P(P-L)}\,dP = \frac{1}{L}\ln\left|\frac{P-L}{P}\right|$,

D'où $\displaystyle\frac{1}{L}\ln\left|\frac{P-L}{P}\right| = -\frac{k}{L}t + C \Rightarrow \ln\left|\frac{P-L}{P}\right| = -kt + \alpha$

$(\alpha = CL) \Rightarrow \dfrac{P-L}{P} = Ae^{-kt} \Rightarrow P - L = APe^{-kt} \Rightarrow$

$$(1-Ae^{-kt})P = L \Rightarrow P = \frac{L}{1-Ae^{-kt}}.$$

$$t=0,\ P = P_0 \Rightarrow P_0 = \frac{L}{1-A} \Rightarrow A = 1 - \frac{L}{P_0} = \frac{P_0 - L}{P_0}$$

On peut alors écrire

$$P(t) = \frac{L}{1+Ae^{-kt}} \text{ avec } A = \frac{L-P_0}{P_0}.$$

[2] $y(t)$ = fraction de la population qui est au courant

D'après la question,

(a) $\frac{dy}{dt} = ky(1-y)$. Cette équation est logistique avec $L = 1$

(b) On sait que la solution de l'équation logistique est donnée par

$y(t) = \frac{L}{1+Ae^{-kt}}$ où $L = 1$, $A = \frac{L - y_0}{y_0} = \frac{1 - y_0}{y_0}$ où y_0

désigne la fraction initiale de la population qui sont au courant.

(c) Supposons que $t = 0$ correspond à 8 h le matin; $y_0 = \frac{80}{1000} = 0.08$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1-0.08}{0.08} e^{-kt}} = \frac{0.08}{0.08 + 0.92 e^{-kt}}$$

À midi, $t = 4$, $y = 1/2 \Rightarrow 1/2 = \frac{0.08}{0.08 + 0.92 e^{-4k}} \Rightarrow$

$0.08 + 0.92 e^{-4k} = 0.16 \Rightarrow e^{-4k} = \frac{0.08}{0.92} \Rightarrow k \simeq 0.61$

$$y(t) = \frac{0.08}{0.08 + 0.92 e^{-0.61t}}$$

90 % de la population est au courant $\Rightarrow y = 0.9$:

$0.9 = \frac{0.08}{0.08 + 0.92 e^{-0.61t}} \Rightarrow 0.08 = 0.072 + 0.828 e^{-0.61t}$

$\Rightarrow t \simeq$ 7 heures et 36 minutes, c'est-à-dire vers 15 h 36.

3 Soit $P(t)$ le nombre de poissons dans le lac au temps t. 3

Comme la croissance de la population suit le modèle logistique, on peut écrire : $\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{L}\right) = kP\left(1-\frac{P}{10000}\right)$

La solution est $P = \frac{10000}{1+Ae^{-kt}}$ où $A = \frac{L-P_0}{P_0} = \frac{10000-400}{400} = 24$

$$P = \frac{10000}{1+24e^{-kt}}.$$

$t=1, \quad P = 1200 \Rightarrow 1200 = \frac{10000}{1+24e^{-k}} \Rightarrow 10000 = 1200 + 28800e^{-k}$

$\Rightarrow k = 0.305$ et alors $P = \frac{10000}{1+24e^{-0.305t}}$

(b) $P = 5000 \Rightarrow 5000 = \frac{10000}{1+24e^{-0.305t}} \Rightarrow 10000 = 5000 + 120000e^{-0.305t}$

$\Rightarrow t \simeq 10.5$ années.

Exercices supplémentaires sur le Centre de masse

$\boxed{1}$ Trouver le Centre de masse de la région limitée par $y=x^2$; $y=0$, $x=2$

$\boxed{2}$ " " " " " " " " " " $y=1-x^2$, $y=0$

$\boxed{3}$ " " " " " " " " " " $y=2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

$\boxed{4}$ " " " " " " " " " " $y=e^x$, $y=x$, $x=0$, $x=1$

$\boxed{5}$ " " " " " " " " " " $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$

$\boxed{6}$ " " " " " " " " " " $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$

$\boxed{7}$ Trouver le Centre de masse d'une plaque homogène mince triangulaire dont les sommets sont $(1,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$

$\boxed{8}$ Trouver le Centre de masse d'une plaque homogène mince qui a la forme d'un demi-Cercle dont le diamètre est sur l'axe des y et le Centre est à l'origine de rayon 2 et qui passe par le point $(-2,0)$.

$\boxed{9}$ Considérer une tige de longueur 1 m avec une densité de $\delta(x)=1+kx^2$ kg/m où k est une Constante positive.

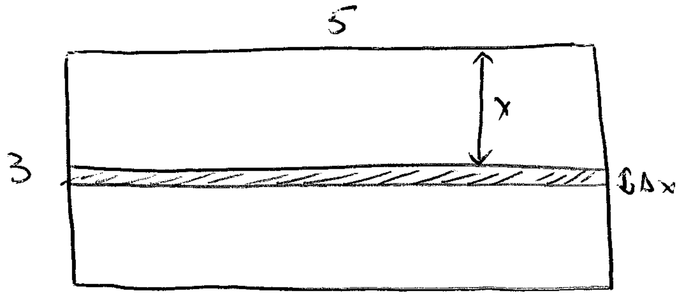
(a) Trouver le Centre de masse en fonction de k

(b) Montrer que le Coordonné du Centre de masse satisfait

$$0.5 < \bar{x} < 0.75$$

MAT 1722 - Solutions de problèmes suggérés - Masse totale

(1)



Prenons une tranche horizontale à une distance x de l'un des côtés de longueur 5 et d'épaisseur Δx.

La masse de cette tranche est alors $\frac{x}{1+x^4} 5\Delta x = \frac{5x}{1+x^4}\Delta x$, si on couvre la feuille avec n telles tranches, on obtient une approximation de la masse avec une somme de Riemann :

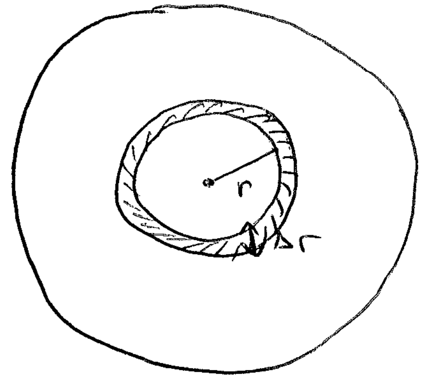
$$M \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{5x_i}{1+x_i^4}\Delta x .$$ À mesure que $n \to +\infty$,

$$M = \int_0^3 \frac{5x}{1+x^4}\,dx .$$ Posons $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int \frac{5x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{5x}{1+u^2}\frac{du}{2x} = \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{5}{2}\operatorname{Arctan}(u) = \frac{5}{2}\operatorname{Arctan}(x^2)$$

$$M = \left[\frac{5}{2}\operatorname{Arctan} x^2\right]_0^3 = \frac{5}{2}\operatorname{Arctan} 9 \simeq 3{,}65 \text{ kg}$$

(2) Prenons un anneau de pétrole à une distance r du centre de la nappe et d'épaisseur Δr. La masse d'une telle tranche est égale à la



densité de la tranche × aire de la tranche =

$$\frac{50}{1+r} 2\pi r \,\Delta r = \frac{100\pi r}{1+r} \Delta r.$$

Si on prend n telles tranches circulaires qui couvrent la nappe, on obtient une somme de Riemann :

$$M \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{100\pi r_i}{1+r_i} \Delta r$$

si $n \to +\infty$, alors $M = \int_0^{10000} \frac{100\pi r}{1+r} dr = 100\pi \int_0^{10000} \frac{r}{1+r} dr$

$$\int \frac{r}{1+r} dr = \int \frac{r+1-1}{1+r} dr = \int \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) dr = r - \ln|1+r| + C$$

d'où $M = 100\pi \left[r - \ln(1+r) \right]_0^{10000} \simeq 3138699.2$ kg.

On veut maintenant trouver la distance d du centre de la nappe à l'intérieur de laquelle se trouve la moitié de la masse : un raisonnement semblable à ce qu'on a fait en haut permet de conclure que la masse de pétrole dans la nappe de rayon d est donnée par $\int_0^d \frac{100\pi r}{1+r} dr$

$= 100\pi \left[r - \ln(1+r) \right]_0^d = 100\pi \left[d - \ln(1+d) \right]$. On cherche alors la valeur de d telle que $100\pi[d - \ln(1+d)] = \frac{3138699.2}{2}$

$\Rightarrow d - \ln(1+d) \simeq 4995$ kg. Il n'y a pas une méthode précise pour résoudre une telle équation. Par essai et erreur, on trouve $d \simeq 5009$ m.

3 $\delta(x) = 3 - e^{-x} \Rightarrow \delta'(x) = e^{-x} > 0$, d'où la densité est une fonction croissante de x, c'est-à-dire à mesure que x augmente, $\delta(x)$ augmente aussi. Comme le centre de masse est dans la partie la plus dense de l'objet, il est situé dans ce cas à droite de l'origine.

La masse totale de la tige est $M = \int_{-1}^{1} (3 - e^{-x})\, dx =$

$$\left[3x + e^{-x}\right]_{-1}^{1} = 3 + \frac{1}{e} - (-3 + e) = 6 - e + \frac{1}{e} \simeq 4 \text{ kg}$$

Le centre de masse se trouve à une distance

$$\bar{x} = \frac{\int_{-1}^{1} x\, \delta(x)\, dx}{\int_{-1}^{1} \delta(x)\, dx}$$ de l'origine

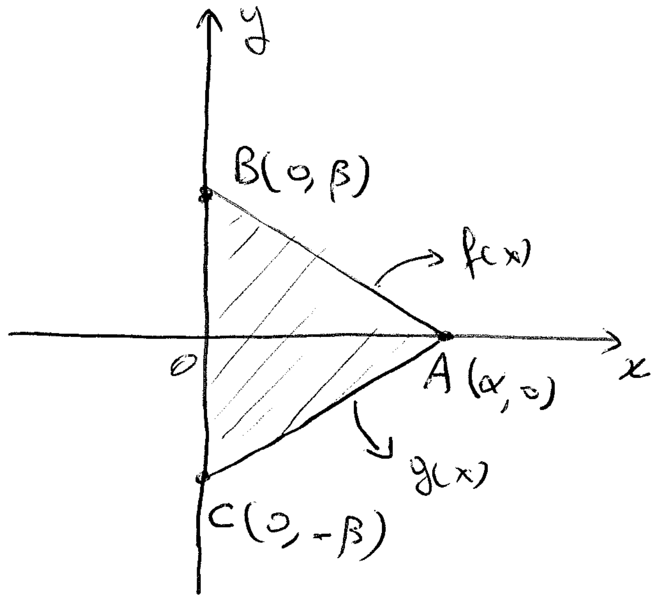
$$\int x\, \delta(x)\, dx = \int (3x - xe^{-x})\, dx = \frac{3}{2}x^2 - \int xe^{-x}\, dx$$

Par parties : $u = x$, $v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1$, $v = -e^{-x}$

$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} x\, \delta(x)\, dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + xe^{-x} + e^{-x}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{e}$$

D'où $\bar{x} \simeq \dfrac{6 - e + \frac{1}{e}}{2/e} \simeq$ (à droite de l'origine comme prévu)



Équation de AB :

$$y = \frac{\beta - 0}{-\alpha} x + \beta$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha} x + \beta$$

Équation de AC :

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \beta$$

Supposons que $(\bar{x}, \bar{y})$ est le centre de masse de la plaque. Alors

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^\alpha x [f(x) - g(x)]\, dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^\alpha \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2]\, dx$$

$$A = \text{aire du triangle} = \frac{\alpha \cdot 2\beta}{2} = \alpha\beta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha x \left(-\frac{\beta}{\alpha} x + \beta - \frac{\beta}{\alpha} x + \beta\right) dx = \frac{2}{\alpha\beta} \left[-\frac{\beta}{\alpha} \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{2}{\alpha\beta} \left[-\frac{\beta\alpha^2}{3} + \frac{\beta\alpha^2}{2}\right] = \frac{2}{\alpha\beta} \left[\frac{\beta\alpha^2}{6}\right] = \frac{\alpha}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 - \frac{2\beta^2}{\alpha} x + \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha} x - \beta^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{2\alpha\beta} \int_0^\alpha 0\, dx = 0$$

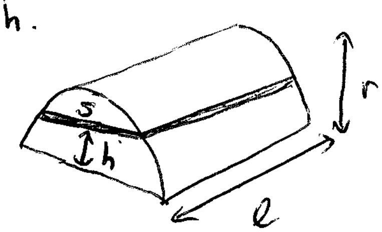
. Donc le centre de masse est le point $\left(\frac{\alpha}{3}, 0\right)$ qui est indépendant de β

5 Prenons une tranche horizontale de bord de scie à une distance h du sol et d'épaisseur Δh.

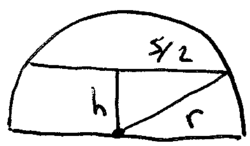
La densité de la tranche est alors

kh et sa masse est

$(kh) \cdot$ volume de la tranche



$= kh . s l \Delta h$. Exprimons s en fonction de h:



$$r^2 = h^2 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow s = 2\sqrt{r^2 - h^2}$$

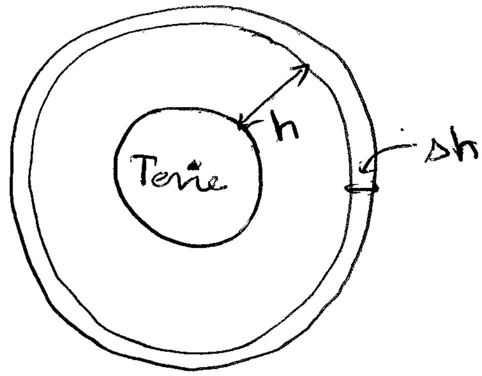
masse de la tranche $= 2kl h\sqrt{r^2-h^2}\,\Delta h$, et la masse totale est alors

$$M = \int_0^r 2kl h\sqrt{r^2-h^2}\,dh = 2kl\int_0^r h\sqrt{r^2-h^2}\,dh$$

Posons $u = r^2 - h^2 \Rightarrow \frac{du}{dh} = -2h \Rightarrow dh = \frac{du}{-2h}$

$$\int h\sqrt{r^2-h^2}\,dh = \int h\sqrt{u}\,\frac{du}{-2h} = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}(r^2-h^2)^{3/2}$$

$$M = 2kl\left[-\frac{1}{3}(r^2-h^2)^{3/2}\right]_0^r = \frac{2}{3}klr^3$$



Considérer une Couche d'atmosphère à une distance h de la surface de la Terre et d'épaisseur Δh (la Couche est une sphère creuse). La masse de cette Couche est le volume de la Couche multiplié par la densité:

$$4\pi (R_T + h)^2 \Delta h \left(1.28\, e^{-0.000124h}\right) \text{ kg} \quad \text{où } R_T = 64.10^7 \text{ m}$$

(noter que la surface latérale d'une sphère est $4\pi R^2$)

Alors la masse totale est donnée par

$$\int_0^{100} 4\pi (1.28)\, (64\, 10^7 + h)^2 e^{-0.000124h}\, dh .$$

Posons $a = 0.000124$ et $b = 64.10^7$. Alors

$$M = 5.12\,\pi \left[\int_0^{100} b^2 e^{-ah}\, dh + \int_0^{100} h^2 e^{-ah}\, dh + 2b \int_0^{100} h e^{-ah}\, dh \right]$$

Pour $\int h e^{-ah}\, dh$, on procède par parties:

$u = h, \quad v' = e^{-ah} \Rightarrow u' = 1, \quad v = -\frac{1}{a} e^{-ah}$

$$\int h e^{-ah} dh = -\frac{h}{a} e^{-ah} + \frac{1}{a}\int e^{-ah} dh = -\frac{h}{a} e^{-ah} - \frac{1}{a^2} e^{-ah}$$

Pour $\int h^2 e^{-ah} dh$, on procède aussi par parties :

$u = h^2, \quad v' = e^{-ah} \Rightarrow u' = 2h, \quad v = -\frac{1}{a} e^{-ah}$

$$\int h^2 e^{-ah} dh = -\frac{h^2}{a} e^{-ah} + \frac{2}{a}\int h e^{-ah} dh$$

$$= -\frac{h^2}{a} e^{-ah} + \frac{2}{a}\left[-\frac{h}{a} e^{-ah} - \frac{1}{a^2} e^{-ah}\right]$$

$$= \left[-\frac{h^2}{a} - \frac{2h}{a^2} - \frac{2}{a^3}\right] e^{-ah}$$

, Alors

$$M = 512\pi \left[\left(-\frac{b^2}{a} + \frac{h^2}{a} - \frac{2h}{a^2} - \frac{2}{a^3} - \frac{2bh}{a} - \frac{2b}{a^2}\right) e^{-ah}\right]_0^{100}$$

$$\simeq 65.10^{15} \text{ kg}$$

Solutions des problèmes de pratique pour les fonctions à plusieurs variables

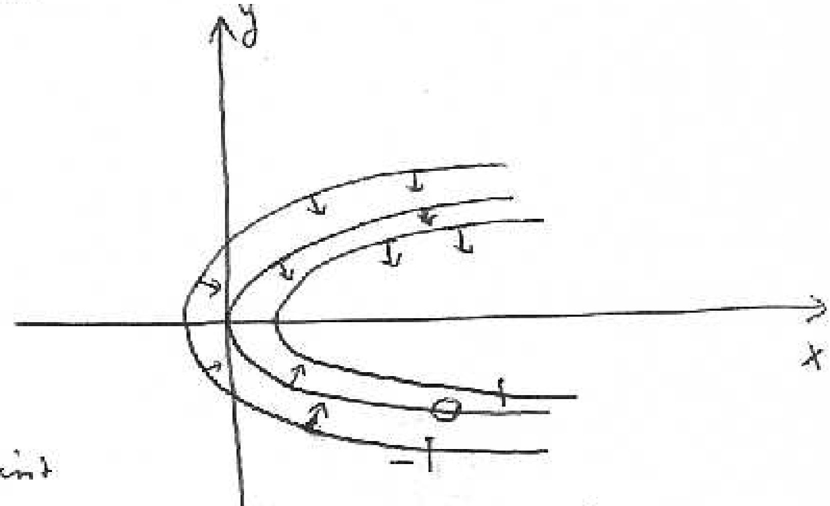
$\boxed{1}$ $f(x,y) = x - 2y^2$

(1) une Courbe de niveau est une Courbe plane de la forme
$f(x,y) = C$ (C est une Constante) $\Rightarrow x - 2y^2 = C$
$\Rightarrow x = 2y^2 + C$: des paraboles ouvertes sur l'axe des x.

$\underline{C = -1}$ $x = 2y^2 - 1$

$\underline{C = 0}$ $x = 2y^2$

$\underline{C = 1}$ $x = 2y^2 + 1$



Le vecteur gradient à un point d'une Courbe de niveau pointe dans la direction de f croissante.
C'est pourquoi les vecteurs qui figurent pointent vers l'intérieur.

(2) Remarquer tout d'abord que le vecteur $\vec{u} = (1, -4)$ n'est pas unitaire comme sa longueur est $\sqrt{17}$. Alors le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{u}$.

$$f_{\vec{u}}(2,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = -12$

D'où $f_{\vec{u}}(2,3) = 1.\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - 12\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \frac{49}{\sqrt{17}} > 0$. Donc, la fonction croît dans la direction du vecteur $(1,-4)$

(3) La direction du vecteur gradient $\nabla f(2,3)$ est celle de la croissance maximale de la fonction au point $(2,3)$;

$\nabla f(2,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\right) = (1, -12)$

Ce taux maximal est la longueur de vecteur gradient :

$\|\nabla f(2,3)\| = \|(1,-12)\| = \sqrt{145}$.

$\boxed{2}$ $T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^2+1}$

(a) une courbe de niveau de $T(x,y)$ est une courbe plane de la forme $T(x,y) = C \Leftrightarrow$

$$\frac{100}{x^2+y^2+1} = C \Leftrightarrow x^2+y^2+1 = \frac{100}{C}$$

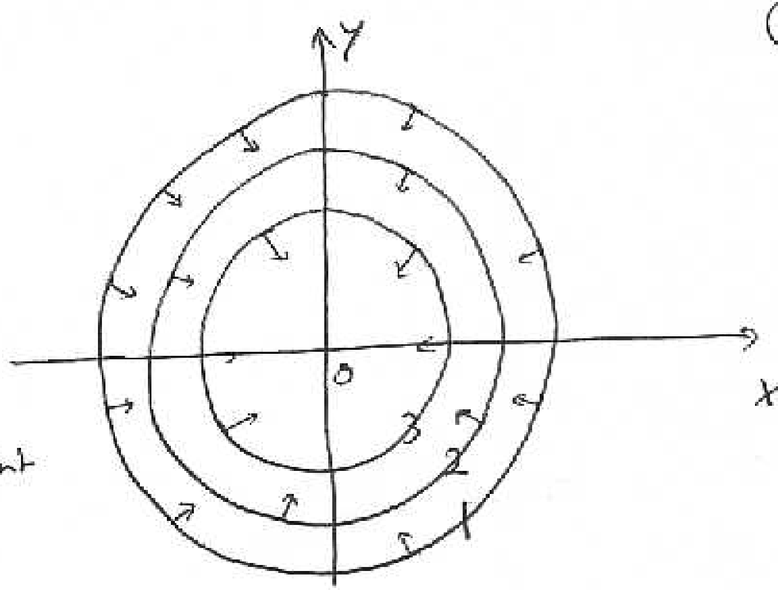
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{100-C}{C}$$: cercles centrés à $(0,0)$

Comme $x^2+y^2 \geq 0$, il faut que $\frac{100-C}{C} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < C \leq 100$

$\underline{C=1}$ $\quad x^2+y^2 = 99$

$\underline{C=2}$ $\quad x^2+y^2 = 49$

$\underline{C=3}$ $\quad x^2+y^2 = \frac{97}{3}$



Le vecteur gradient en un point de la courbe de niveau pointe dans la direction de croissance pour la fonction, c'est pourquoi dans ce cas les vecteurs vers le centre.

(b) Comme $T(x,y) = \dfrac{100}{x^2+y^2+1}$, alors la température est maximale lorsque le dénominateur x^2+y^2+1 est minimale, c'est à dire lorsque $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$. Dans ce cas, la la valeur de la température est de $100\,^\circ C$. Donc la température est maximale au centre (il semble que la source est placée au centre).

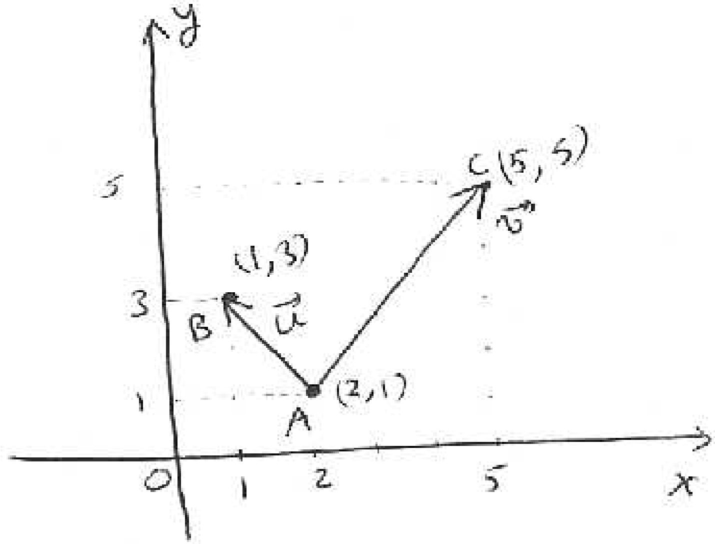
(c) $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{-200x}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x}(1,-1) = \dfrac{-200}{9}$

$\dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{-200y}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial y}(1,-1) = \dfrac{200}{9}$

La température croît le plus rapidement dans la direction du vecteur gradient $\nabla T(1,-1) = \left(\dfrac{\partial T}{\partial x}(1,-1), \dfrac{\partial T}{\partial y}(1,-1)\right) =$

$\dfrac{200}{9}(-1,1)$.

$\boxed{3}$



Lorsqu'on commence au point $A(2,1)$ et on se déplace dans la direction du point $B(1,3)$, la direction de déplacement est le vecteur $\vec{u} = B - A = (1,3) - (2,1) = (-1,2)$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{5} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{u}$. Lorsqu'on déplace du point $A(2,1)$ au point $C(5,5)$, le vecteur de déplacement est $\vec{v} = C - A = (3,4)$.

$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16} = 5 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est un vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{v}$. On a

$$f_{\vec{u}}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ par hypothèse}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 \qquad (1)$$

$$f_{\vec{v}}(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\left(\frac{4}{5}\right) = 1 \text{ par hypothèse}$$

$$\Rightarrow 3\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + 4\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 5 \qquad (2)$$

On cherche $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ à partir des équations

① et ② :

$$2 \times ① + ② \Rightarrow 5 \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 9 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{9}{5}$$

$$① \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) - 2\right] = \frac{9}{10} - 1 = -\frac{1}{10}$$

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right) = \left(9/5, -\frac{1}{10}\right)$$

$\boxed{4}$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, dash, "\frac{\partial z}{\partial x}"'] \arrow[dr, dash, "\partial z/\partial y"] & \\ x \arrow[dr, dash, "\frac{dx}{dt}"'] & & y \arrow[dl, dash, "\frac{dy}{dt}"] \\ & t & \end{tikzcd}$$

Par la règle de dérivation en chaîne en plusieurs variables, on a :

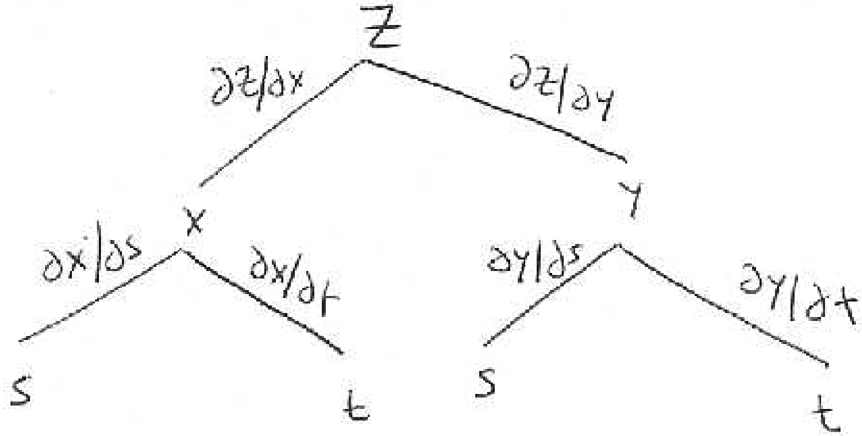
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$\left(2xy^3 + e^y\right)\frac{1}{t} + \left(3x^2y^2 + xe^y\right)\left(2e^{2t}\cos(t^2-1) - 2te^{2t}\sin(t^2-1)\right)$$

Pour $t=1$: $x = 0$, $y = e^2$, alors

$$\frac{dz}{dt} = e^{e^2}$$

5



D'après la règle de dérivation en chaîne pour des fonctions à plusieurs variables, on a :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

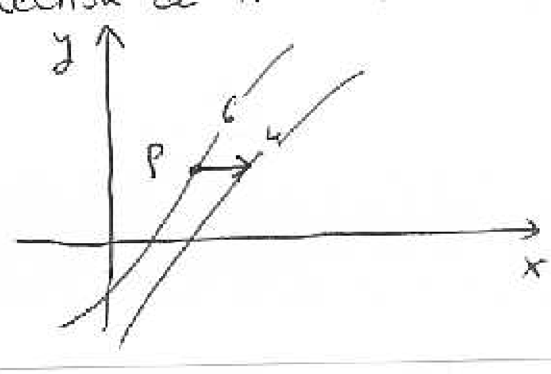
$$= \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)(2st) + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)(2s)$$

Lorsque $s=-1$, $t=1$ on a $x=1$, $y=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = -4$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)s^2 + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)(-2t)$$

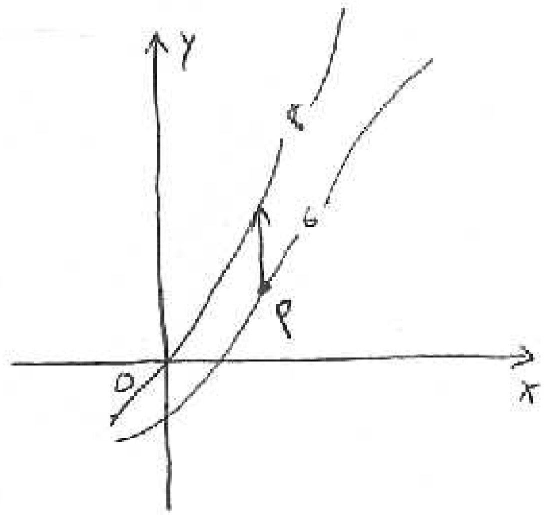
$$= 2$$

6 Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$, on suppose que y est une constante, c'est à dire on déplace suivant une ligne horizontale à partir du point P dans la direction de x croissant :



On voit qu'on passe de la courbe de niveau 6 à la courbe de niveau 4. Donc la fonction décroît dans ce cas et alors $\frac{\partial f}{\partial x}(P) < 0$.

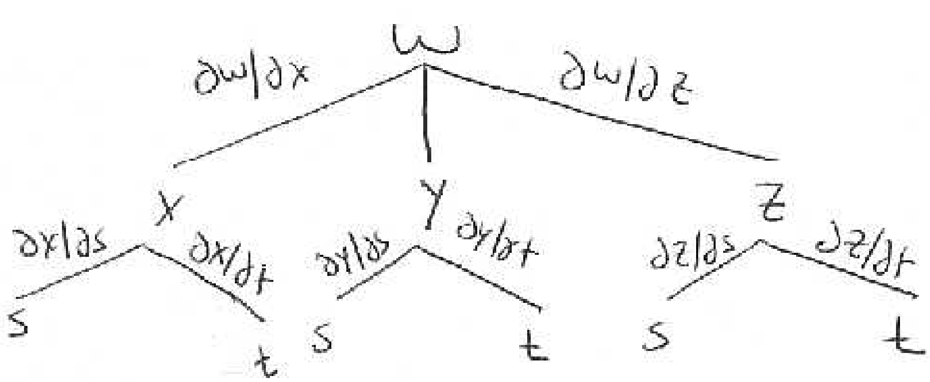
Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$, on suppose que x est une constante, c'est-à-dire on déplace verticalement à partir du point P dans la direction de y croissant :



On voit qu'on passe de la courbe de niveau 6 à la courbe de niveau 8. Donc la fonction croît dans cette direction.

D'où $\frac{\partial f}{\partial y}(P) > 0$.

$\boxed{7}$ $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = st$, $y = s\cos t$, $z = s\sin t$



D'après la règle de dérivation en chaîne en plusieurs variables, on a :

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 2x(s) + 2y(\cos t) + 2z(\sin t).$$

Quand $s=1$ et $t=0$, on a: $x=0, y=1, z=0$, d'où

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2.$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (2x)s + (2y)(-s\sin t) + (2z)(s\cos t) = 0$$

$\boxed{9}$ $z^2 + x^2 - 4xy + y^2 = 4$, $z = f(x,y)$

L'équation du plan tangent est

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ on dérive l'équation de la surface implicitement par rapport à x et à y:

$2z\frac{\partial z}{\partial x} + 2x - 4y = 0$. Au point $x=1, y=1$, $z=2$ on a:

$$4\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}.$$

Dérivons maintenant par rapport à y:

$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 4x + 2y = 0$. Au point $x=1, y=1$, $z=2$ on a:

$$4\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) - 4 + 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

L'équation du plan tangent est alors :

$$Z = 2 + \frac{1}{2}(X-1) + \frac{1}{2}(Y-1) \iff X + Y - 2Z + 2 = 0.$$

$\boxed{10}$ $$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(4xy^2z + 4y^3z^2\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(8xyz + 12y^2z^2\right)$$

$$= 8xy + 24y^2z$$

D'où $$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(2,1,1) = 16 + 24 = 40.$$

Fonctions à plusieurs variables

1 Considérer la fonction à plusieurs variables

$$f(x,y) = x - 2y^2$$

(1) Tracer quelques courbes de niveau de la fonction f et tracer quelques vecteurs gradients à plusieurs points de ces courbes

(2) Calculer la dérivée directionnelle de la fonction au point $(2,3)$ dans la direction du vecteur $(1,-4)$. La fonction f est-elle croissante ou décroissante dans cette direction?

(3) Dans quelle direction faut-il déplacer au point $(2,3)$ pour avoir un taux de croissance maximal? Quel est ce taux maximal?

2 La température T en un point (x,y) du plan est donnée par

$$T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^2+1} \quad \text{en degrées Celcius}$$

(a) Tracer quelques courbes de niveau de T, indiquer aussi les vecteurs gradients en plusieurs points de chaque courbe de niveau.

(b) En quel point du plan, la température est la plus élevée, quelle est la valeur de cette température maximale?

(c) Trouver la direction dans laquelle la température croît le plus rapidement au point $(1,-1)$. Quel est ce taux de croissance maximal?

3 La dérivée directionnelle de la fonction $z = f(x,y)$ au point $(2,1)$ dans la direction du point $(1,3)$ est $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ et la dérivée directionnelle dans la direction du point $(5,5)$ est 1. Trouver

$$\nabla f(2,1) \quad \text{(le vecteur gradient)}$$

4 Supposons que $z = x^2y^3 + x e^y$ et que

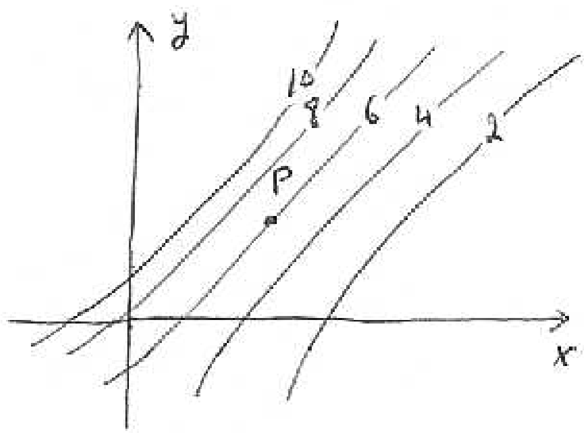
$x = \ln t$, $y = e^{2t}\cos(t^2-1)$

Trouver $\frac{dz}{dt}$ au point $t = 1$.

5 Supposer que $z = \ln(x^2+y^2)$, $x = s^2 t$, $y = s^2 - t^2$

Trouver $\frac{\partial z}{\partial s}$ et $\frac{\partial z}{\partial t}$ au point $s = -1$, $t = 1$.

6 Voici quelques courbes de niveau d'une fonction f. Déterminer si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont positives ou négatives au point P.



7 Supposer que $w = x^2+y^2+z^2$, $x = st$, $y = s\cos t$, $z = s\sin t$

Trouver les valeurs des dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial s}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$ quand $s = 1$ et $t = 0$.

8 Trouver $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ si $u = \frac{x+y}{y+z}$,

$x = p+r+t$, $y = p-r+t$, $z = p+r-t$

$\boxed{9}$ La fonction Z de deux variables x, y est donnée implicitement par l'équation $Z^2 + x^2 - 4xy + y^2 = 4$ (C'est l'équation d'une surface à 3 dimensions). Trouver l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 2)$

$\boxed{10}$ si $f(x,y,z) = 2x^2y^2z + 4xy^3z^2$, Calculer $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(2,1,1)$

1

(a) $\frac{3}{5} - \frac{3}{6} + \frac{3}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{9} - \cdots = \sum_{n=5}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{n}$

Utilisons le test des séries alternées.

(1) $b_{n+1} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{n} = b_n$ (2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$.

La série est alors convergente.

(b) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(1) $b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} = b_n$ (2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

Donc, la série converge

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5}$, alors

$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{5n+1} \neq 0$. La série diverge par le Test de divergence

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} \neq 0$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ diverge par le Test de divergence.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$. Appliquons le Test des séries alternées :

Posons $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ sur $[1, +\infty[$

Donc $f(x)$ est décroissante $\Rightarrow f(n+1) \leq f(n) \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n^2}{n^2+1} \Rightarrow$

$b_{n+1} \leq b_n$.

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

La série Converge par le Test des séries alternées.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$.

Posons $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ pour $x > e$

La fonction $f(x)$ est alors décroissante sur $[e, +\infty[$. Par Conséquent, $b_{n+1} \leq b_n$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ Converge par le Test des séries alternées.

2 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^3}$

Vérifions tout d'abord la convergence absolue : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$:

utilisons le Test du quotient.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}\,\frac{n^3}{3^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 3 > 1.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$ est divergente et parsuite la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^3}$

n'est pas absolument convergente.

<u>Remarque</u> la série est divergente : $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\ln 3}{3n^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n(\ln 3)^2}{6n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n(\ln 3)^3}{6} = +\infty$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^3} \neq 0$ et parsuite la série diverge.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{3^n(-1)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$ la

série converge absolument

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. La série des valeurs absolues est $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

Appliquons la forme limite du Test de Comparaison avec la

série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = 1/2 < +\infty$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (série p), la série

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ diverge aussi. Donc $\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ n'est pas absolument

Convergente. Utilisons maintenant le Test des séries alternées :

(1) $b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} > \frac{1}{2n+1} = b_n$

(2) $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ est semi-convergente.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. La série des valeurs absolues est

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. Comparons avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 < +\infty$. Comme la série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverge aussi.

Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ n'est pas absolument convergente.

Utilisons ensuite le Test des séries alternées :

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

≤ 0 sur $[1, +\infty[$. Donc f est décroissante.

Ainsi $b_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$.

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est semi-convergente.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$. La série des valeurs absolues est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{n^2}$.

Comme $\frac{|\sin(2n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (car $|\sin(2n)| \leq 1$), le test de comparaison montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(2n)|}{n^2}$ est convergente car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ l'est.

Donc la série est absolument convergente (en particulier, elle est convergente).

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$. La série des valeurs absolues est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{5(n+1)^2} \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

Utilisons le test du quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{5(n+2)^2}\left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \frac{5(n+1)^2}{16}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \frac{5}{4} = \frac{5}{4} > 1$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{5(n+1)^2}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverge et par conséquent, la série

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$ n'est pas absolument convergente.

Remarquer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{16\ (5/4)^n}{5(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{16\ (5/4)^n \ln(5/4)}{2(n+1)} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{16\,(5/4)^n\,(\ln(5/4))^2}{2} = +\infty \text{ . D'où}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}\frac{5^{n-1}}{(n+1)^2\,4^{n+2}} \neq 0$$ et la série diverge par le Test de divergence.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n\,3^{2n}}$. utilisons le Test de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)\,5^{n+1}}{(n+1)\,3^{2n+2}}\,\frac{n\,3^{2n}}{(n+1)\,5^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\left(5/9\right) = \frac{5}{9} < 1$$

Alors la série est absolument Convergente.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/6)}{n\sqrt{n}}$. La série des valeurs absolues est $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(n\pi/6)|}{n\sqrt{n}}$.

Remarquer que $\dfrac{|\cos(n\pi/6)|}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Comme la série

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ est Convergente, le test de Comparaison implique que

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\pi/6)|}{n\sqrt{n}}$ Converge aussi. Donc, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/6)}{n\sqrt{n}}$

Converge absolument.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n!\,10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{10^n}$. utilisons le Test de

D'Alembert $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3)(n+2)}{10^{n+1}}\,\frac{10^n}{(n+2)(n+1)} =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{n+3}{n+1}\right) = \frac{1}{10} < 1$. La série Converge absolument.

$\boxed{3}$ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\, a_n$

Remarquer que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}}$. Mais $0 < \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} 0}_{0} \leq \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}}}_{0}$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}} = 0$

et par suite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$. La série converge absolument.

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(Kn)!}$ utilisons le Test du quotient:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(K(n+1))!}\,\frac{(Kn)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(Kn+1)\cdots(Kn+K)}$$

Envisageons les cas suivants.

* si $\underline{K=1}$ $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n+1} = \infty$, la série diverge
* si $\underline{K=2}$ $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{4} < 1$, la

Série converge absolument.

* si $\underline{K>2}$ $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{(Kn+1)\cdots(Kn+K)} = 0 < 1$, et

la série converge absolument.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(Kn)!}$ converge absolument si $K \geq 2$ et

diverge si $K=1$.

MAT 1722 - Problèmes suggérés

Les séries entières

1. On sait que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge pour $x=-4$ et diverge pour $x=6$. Que sait-on au sujet de la convergence ou de la divergence des séries suivantes ?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$.

2. Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de chaque série

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n2^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} (2x-1)^n$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n5^n}$ (11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

3. Si k est un entier positif, déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n.$$

1 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$ Converge pour $x=-4$ et diverge pour $x=6$.

Une Conséquence de ces information est que la Série Converge absolument pour tout x tel que $|X| \leq 4$ et diverge pour x tel que $|x| \geq 6$.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n 1^n$: Converge car $|1| \leq 4$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n 8^n$: diverge car $8 > 6$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (-3)^n$: Converge car $|-3| = 3 < 4$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n 9^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (-9)^n$: diverge car $|-9| > 6$.

2 (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$

$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+3} \frac{n+2}{x^n}\right| < 1 \iff \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right) |x| < 1$

$\iff |x| < 1 \iff -1 < x < 1$.

$\underline{x=-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$: Série alternée.

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ b_{n+1} = \frac{1}{n+3} < b_n = \frac{1}{n+2} \\ (2)\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \text{ Converge}$$

$\underline{x=1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$: utilisons la forme limite de Comparaison avec la Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1 < +\infty$. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ diverge aussi. Donc l'intervalle de convergence est $[-1,1[$.

et le rayon de convergence est 1.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} \frac{\sqrt[3]{n}}{(-1)^n x^n} \right| < 1$

$\Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\right) |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

<u>$x = -1$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} (-1)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$: diverge,

série $p = 1/3$

<u>$x = 1$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$: série alternée

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad b_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < b_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \\ (2)\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \text{ est convergente.}$$

Intervalle de convergence $=]-1, 1]$
Rayon " " $= 1$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$ pour tout $x \neq 0$.

Donc, la série converge pour tout x.

Intervalle de convergence $=]-\infty, +\infty[$. Rayon de convergence $= \infty$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n^2}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{X^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{X^n}\right| =$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |X| = |X|$.

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow |X| < 1 \Leftrightarrow -1 < X < 1$

$\underline{X=-1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$: Série absolument Convergente Car

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: série $p = 2 > 1$

$\underline{X=1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: Convergente (série $p = 2 > 1$)

Donc l'intervalle de Convergence est $[-1, 1]$.

Rayon " " " 1

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{n 2^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} X^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n 2^n}{(-1)^n X^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)|X| = \frac{|X|}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|X|}{2} < 1 \Leftrightarrow |X| < 2 \Leftrightarrow -2 < X < 2$

$\underline{X=2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: Série alternée :

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < b_n = \frac{1}{n} \\ (2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ Converge}$$

$\underline{X=-2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: Série divergente.

Intervalle de Convergence $=]-2, 2]$

Rayon " " $= 2$

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{10^{n+1}} \frac{10^n}{n^2 x^n}\right| =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{10} |x| = \frac{|x|}{10} < 1 \Leftrightarrow -10 < x < 10.$

$\underline{x=-10}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(-10)^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$; divergente par le

Test de divergence : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n^2 \neq 0$

$\underline{x=10}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$: divergente par le Test de divergence.

Intervalle de convergence $=]-10, 10[$

Rayon " " $= 10$

(7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, 2^n}{4^n}(x-1/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-1/2)^n$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{2^{n+1}} (x-1/2)^{n+1} \frac{2^n}{n(x-1/2)^n}\right| =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)|x-1/2| = \frac{|x-1/2|}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < |x-1/2| < 2$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}.$

$\underline{x=-3/2}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$; divergente

par le Test de divergence

$\underline{x=5/2}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n$; divergente par le

Test de divergence.

Intervalle de convergence $=]-3/2, 5/2[$

Rayon " " $= 2$

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} \frac{(2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1}} \right|$$

$= \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^2}{(2n+1)(2n)} = +\infty$ pour tout $x \neq 0$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge pour tout x.

Intervalle de convergence $=]-\infty, +\infty[$

Rayon " " $= +\infty$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$. $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \dfrac{\sqrt{n}}{(-1)^n(x-1)^n} \right|$

$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\, |x-1| = |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

$\underline{x=0}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$; divergente ;

Série $p = 1/2 < 1$.

$\underline{x=2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: Série alternée convergente :

(1) $b_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et (2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Intervalle de convergence $=]0, 2]$

Rayon " " $= 1$

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{n5^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \frac{n5^n}{(x-4)^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x-4| = \frac{|x-4|}{5} < 1 \Leftrightarrow -5 < x-4 < 5 \Leftrightarrow$

$-1 < x < 9$.

<u>$x=-1$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: Série alternée Convergente.

<u>$x=9$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: Série divergente (Série $p=1$)

(11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4} \frac{n+3}{2^n (x-3)^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n+3}{n+4}\right)|x-3| = 2|x-3| < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1/2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2} < x-3 < 1/2 \Leftrightarrow 5/2 < x < 7/2$

<u>$x=5/2$</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-1/2)^n}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$; Série alternée Convergente :

(1) $b_{n+1} = \frac{1}{n+4} < b_n = \frac{1}{n+3}$ et (2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$

<u>$x=7/2$</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (1/2)^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$; Série divergente :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+3} = 1 < +\infty$. Comme la Série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ diverge aussi

Intervalle de Convergence $= [5/2, 7/2[$. Rayon $= 1/2$.

(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{(x+1)^n} \right| =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} |x+1| = |x+1| < 1 \iff -1 < x+1 < 1 \iff -2 < x < 0$

<u>$x = -2$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$: cette série absolument convergente

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ est convergente

(série $p = 2 > 1$), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge aussi.

<u>$x = 0$</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$: convergente.

Intervalle de convergence $= [-2, 0]$

Rayon " " $= 1$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$; $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!\,(2x-1)^{n+1}}{n!\,(2x-1)^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,|2x-1| = +\infty$ pour $x \neq 1/2$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(2x-1)^n$ diverge

en tous x sauf $x = 1/2$.

Intervalle de convergence $= \{1/2\}$

Rayon " " $= 0$.

#18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1.3.5.\cdots(2n-1)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{n\,x^n}\right| =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)}\,|x| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n+1}\,|x| = 0 \text{ si } x \neq 0.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ la série converge pour tout x.

Intervalle de convergence $=]-\infty, +\infty[$

Rayon " " $= +\infty$.

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}\,x^n$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{[(n+1)!]^k\,x^{n+1}}{(k(n+1))!} \cdot \frac{(kn)!}{(n!)^k x^n}\right|$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)}\,|x| =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{kn+k}\right)\left(\frac{n+1}{kn+k-1}\right)\cdots\left(\frac{n+1}{kn+1}\right)|x| = \left(\frac{1}{k}\right)^k |x| < 1 \iff$$

$$|x| < k^k \Rightarrow -k^k < x < k^k.$$

Comme la question demande seulement le rayon de convergence de la série, on a $R = k^k$.

MAT 1722-Problèmes de révision sur l'intégration-

Calculer chacune des intégrales suivantes:

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

(3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(4) $\int_0^1 t^2 2^{-t^3} dt$

(5) $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t dt$

(6) $\int_0^1 x^2 e^{-3x} dx$

(7) $\int_0^1 x \arctan x dx$

(8) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(9) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin(\sqrt{x}) dx$

(10) $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

(11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}, \quad a \neq 0$

(12) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

(13) $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} dx$

(14) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

(15) $\int \frac{x^3+13x^2+7x+6}{(x-1)^2(x+2)^2} dx$

(16) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

(17) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(18) $\int \frac{1}{x^2-3x+6}$

(19) $\int \frac{4x^3+4x^2-96x-100}{x^2-25} dx$

MAT 1722 - Solutions de problèmes de révision sur l'intégration

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$. Procédons par substitution :

$$u = \arctan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow dx = (1+x^2)\,du$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{u}{1+x^2}(1+x^2)\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[(\arctan 1)^2 - (\arctan 0)^2\right]$

$$= \frac{\pi^2}{32}.$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Par substitution

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1+u^2}\,\frac{du}{(-\sin x)} = -\int \frac{du}{1+u^2} = -\arctan u + C$$

$$= -\arctan(\cos x) + C.$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left[-\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi/2} =$

$$-\arctan(0) + \arctan(1) = \pi/4.$$

(3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Par substitution :

$u = \ln x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{x\,du}{x\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}\,du = \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{\ln x} + C$$

D'où $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left[2\sqrt{\ln x}\right]_e^{e^2} = 2\sqrt{\ln e^2} - 2\sqrt{\ln e} = 2\sqrt{2} - 2$

(4) $\displaystyle\int_0^1 t^2\, 2^{-t^3}\,dt$. Par substitution :

$u = -t^3 \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = -3t^2 \Rightarrow dt = \dfrac{du}{-3t^2}$

$$\int t^2 2^{-t^3}\,dt = \int t^2 2^u \frac{du}{-3t^2} = -\frac{1}{3}\int 2^u\,du = -\frac{1}{3}\,\frac{2^u}{\ln 2} + C$$

$$= -\frac{1}{3\ln 2}\,2^{-t^3} + C = -2^{-t^3-1} + C .$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 t^2\, 2^{-t^3}\,dt = \left[\frac{-2^{-t^3}}{3\ln 2}\right]_0^1 = \frac{-2^{-1} + 2^0}{3\ln 2} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{3\ln 2}$

$= \dfrac{1}{6\ln 2}$

(5) $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t \, dt$. Procédons par parties :

$u = \ln t$, $dv = \sqrt{t}\, dt \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$ et $v = \int t^{1/2} dt$
$= \frac{2}{3} t^{3/2}$. D'où

$$\int \sqrt{t} \ln t \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \int \frac{2}{3} t^{3/2} \cdot \frac{1}{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{2}{3} \int t^{1/2} dt$$
$$= \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{4}{9} t^{3/2} + C$$

D'où $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{4}{9} t^{3/2} \right]_1^4 =$

$$\frac{2}{3} 4^{3/2} \ln 4 - \frac{4}{9} 4^{3/2} - \frac{2}{3} \ln 1 + \frac{4}{9} = \frac{4^{5/2}}{3} \ln 2 - \frac{4^{5/2}}{9} + \frac{4}{9}$$
$$= \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{28}{9}$$

(6) $\int_0^1 x^2 e^{-3x} dx$. Par parties :

$u = x^2$, $dv = e^{-3x} \Rightarrow du = 2x\, dx$, $v = \frac{e^{-3x}}{-3}$

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3} \int x e^{-3x} dx$$

Pour trouver $\int x e^{-3x} dx$, on procède par parties de nouveau :

$u = x, \quad dv = e^{-3x}\,dx \Rightarrow du = dx, \quad v = \frac{e^{-3x}}{-3}$

$$\int x e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x}.$$

D'où

$$\int x^2 e^{-3x} = -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x}\right]$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x}.$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{3} e^{-3} - \frac{2}{9} e^{-3} - \frac{2}{27} e^{-3} + \frac{2}{27} = \frac{-17 e^{-3} + 2}{27}$$

(7) $\int_0^1 x \arctan x\,dx$. Par parties:

$u = \arctan x, \quad dv = x\,dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \arctan x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

D'où $\int_0^1 x \arctan x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^1 =$

$$\frac{1}{2}\arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(8) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$. Commençons par une substitution :

$t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^{t}\, 2t\,dt = 2\int t e^t\,dt$. Procédons maintenant par parties :

$u = t$, $dv = e^t\,dt \Rightarrow du = dt$, $v = e^t$

$\int t e^t\,dt = t e^t - \int e^t\,dt = t e^t - e^t$. D'où

$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2te^t - 2e^t = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}$ et alors

$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2\sqrt{4}e^{\sqrt{4}} - 2e^{\sqrt{4}} - 2e + 2e$

$= 4e^2 - 2e^2 = 2e^2$

(9) $\int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x})\,dx$. Commençons par une substitution :

$t = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$\int \sin(\sqrt{x})\,dt = 2\int t\sin(t)\,dt$. Maintenant par parties :

$u = t$, $dv = \sin t\,dt \Rightarrow du = dt$ et $v = -\cos t$

$\int t\sin(t)\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t$.

D'où

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\left[-t\cos t + \sin t\right] + C$$

$$= 2\left[-\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})\right] + C$$

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x})\,dx = 2\left[-\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})\right]_0^{\pi^2/4}$$

$$= 2\left[-\frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) - (0 + \sin(0))\right] = 2$$

(10) $$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int \frac{x^2+2x-1}{x(2x^2+3x-2)}\,dx = \int \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}\,dx.$$

Utilisons la méthode des fractions partielles :

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2} = \ldots$$

$$\frac{A(2x^2+3x-2) + B(x^2+2x) + C(2x^2-x)}{x(2x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(2A+B+2C)x^2 + (3A+2B-C)x - 2A}{2x^3+3x^2-2x} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B+2C = 1 \\ 3A+2B-C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} \end{array}\right] \Rightarrow A = 1/2, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{1}{10}$$

D'où
$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x-1} - \frac{1/10}{x+2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{5}\,\frac{\ln|2x-1|}{2} - \frac{1}{10}\ln|x+2|$$

$$= \ln\sqrt{|x|} + \ln|2x-1|^{1/10} - \ln|x+2|^{\frac{1}{10}} + C$$

$$= \ln \frac{\sqrt{|x|}\,|2x-1|^{\frac{1}{10}}}{|x+2|^{1/10}} + C$$

(11) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx \quad , a \neq 0$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{(A+B)x + (aA - aB)}{x^2-a^2} \Rightarrow$$

$A+B=0$ et $aA - aB = 1 \Rightarrow 2aA = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}, B = -\frac{1}{2a}$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$

Posons $t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2dt$

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,2dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} t + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(13) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. utilisons la méthode de fractions partielles:

$$\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \qquad (A, B, C, D, E \in \mathbb{R})$$

$$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)\,x(x^2+1) + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ C = 0 \\ 2A+B+D = 0 \\ C+E = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -2,\ E = 0$$

D'où $\displaystyle\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ et alors

$$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Pour $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$, posons $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2+1}$$

D'où $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx = \ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + C$ et

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx = \ln 2 + \frac{1}{5} - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{3}{10}$$

(14) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^4-1}dx = \int\left(1+\frac{1}{x^4-1}\right)dx = X + \int \frac{1}{x^4-1}dx$

$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$. utilisons la méthode

de fractions partielles :

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

D'où $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -1/2$ et

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1/2}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$$

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx = x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) + C$$

(15) $\displaystyle\int \frac{x^3+13x^2+7x+6}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$. Par la méthode de fractions partielles,

$$\frac{x^3+13x^2+7x+6}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+2)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ 3A + B + D = 13 \\ 4B - 3C - 2D = 7 \\ -4A + 4B + 2C + D = 6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 7 \\ -4 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -6 & -33 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Longrightarrow A=2,\ B=3,\ C=-1,\ D=4$$

$$\int \frac{x^3+13x^2+7x+6}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \ln(x+2) - \frac{4}{x+2} + C$$

$$= \ln\left(\frac{(x-1)^2}{|x+2|}\right) - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+2} + C$$

(16) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$. Posons $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$

$dx = x\,dt$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \frac{\cos(t)}{x}\,x\,dt = \int \cos t\,dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$$

(17) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Posons $x = \tan\theta$; $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

Alors $dx = \sec^2\theta\,d\theta$ et $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\tan^3\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}\sec^2\theta\,d\theta$

$= \int \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\sec^2\theta\,d\theta$ (Car $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$)

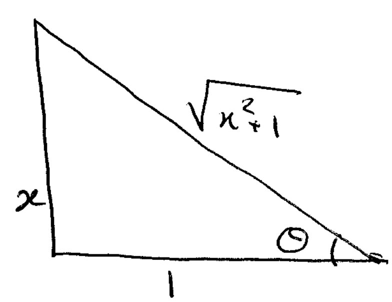
$$= \int \sec\theta\tan^3\theta\,d\theta = \int \frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int \frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta$$

Posons $t = \cos\theta \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = -\sin\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dt}{-\sin\theta}$

$$\int \frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^4\theta}\sin\theta\,d\theta = -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3\theta} - \frac{1}{\cos\theta} + C$$

$x = \tan\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$



D'où $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} - \sqrt{1+x^2} + C$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}\,[x^2+1-3]}{3} + C$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}\,(-2+x^2)}{3} + C$$

(18) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+6}\,dx$. x^2-3x+6 n'admet pas de racines réelles

Car $(-3)^2-4(1)(6) = -15 < 0$

On procède alors par la méthode de complétion de carré :

$$x^2-3x+6 = x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+6 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

$$\int \frac{1}{x^2-3x+6}\,dx = \int \frac{1}{(x-3/2)^2+\frac{15}{4}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{15}}\,\mathrm{Arctan}\left[\frac{2}{\sqrt{15}}(x-3/2)\right]+C$$

(19) $\displaystyle\int \frac{4x^3+4x^2-96x-100}{x^2-25}\,dx$. Commençons par division longue :

$$\begin{array}{l|l}
4x^3+4x^2-96x-100 & x^2-25 \\ \hline
4x^3-100x & 4x+4 \\ \hline
4x^2+4x-100 & \\
4x^2-100 & \\ \hline
4x &
\end{array}$$

D'où $\dfrac{4x^3+4x^2-96x-100}{x^2-25} =$

$4x+4+\dfrac{4x}{x^2-25}$, d'où

$$\int \frac{4x^3+4x^2-96x-100}{x^2-25}\,dx = 2x^2+4x+4\int \frac{x}{x^2-25}\,dx$$

Pour $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-25}\,dx$, on procède par fractions partielles :

$$\frac{x}{x^2-25} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5} \Rightarrow A = B = 1/2 \text{ et alors}$$

$$\int \frac{x}{x^2-25} = \frac{1}{2}\ln(x-5)(x+5)+C = \frac{1}{2}\ln|x^2-25|+C. \text{ D'où}$$

$$\int \frac{4x^3+4x^2-96x-100}{x^2-25}\,dx = 2x^2+4x+2\ln|x^2-25|+C$$

MAT 1722 - Problèmes suggérés -

1 Soit $a_n = \frac{2n}{3n+1}$

(a) La suite numérique $a_n \, ; \, n \geq 0$ est-elle convergente ?

(b) La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est-elle convergente ?

2 Examiner si la série est convergente ou divergente. Si elle converge, calculer sa somme :

(1) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots$ (2) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{4} + \cdots$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 8^{n+1}$ (6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[2(0.1)^n + (0.2)^n\right]$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3(n+1)(n+2)}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right]$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+2^{-n}}$ (17) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

3 Écrivez chacun des nombres suivants comme un nombre rationnel.

(1) $0.\overline{5} = 0.5555\ldots$ (2) $0.\overline{15} = 0.151515\ldots$

(3) $4.\overline{1570} = 4.157015701570\ldots$

4 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série converge. Calculer sa somme pour ces valeurs de x :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

[5] Une balle de Caoutchouc rebondit toujours à une hauteur équivalente à 90 % de la hauteur d'où elle est tombée.

(a) On laisse tomber cette balle d'une hauteur de 6 m. Calculer la distance totale qu'aura parcouru la balle après le troisième rebond

(b) Si on laisse rebondir la balle indéfiniment, quelle sera la distance totale parcourue ?

[6] Un patient prend A grammes d'un certain médicament toutes les 6 heures. La quantité de médicament encore active dans le corps après t heures est $Q = Ae^{-kt}$ grammes ; $k > 0$

(a) Montrer que, immédiatement après l'absorption de la $n^{\text{ième}}$ dose, la quantité active dans le corps est

$$S_n = A + Ae^{-6k} + Ae^{-12k} + \cdots + Ae^{-6(n-1)k}$$

(b) Le patient sera en danger si $S_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Est-ce que $S_n \to \infty$? si non, évaluer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

MAT1722 - Solutions des problèmes suggérés -

1 $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n}{3n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3} = 2/3$; Suite convergente.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{3n+1}$ est divergente par le Test de divergence :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{3n+1} = 2/3 \neq 0.$$

2 (1) $4 + \dfrac{8}{5} + \dfrac{16}{25} + \dfrac{32}{125} + \ldots$ C'est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{5} < 1$, elle converge alors vers $\dfrac{4}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{20}{3}$

(2) $1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} - \dfrac{27}{8} + \ldots$: C'est géométrique de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Comme $|-\frac{3}{2}| > 1$, la série diverge

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^{n-1}}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-3}{4}\right)^n$; Série géométrique de raison $-\dfrac{3}{4} < 1$, alors elle converge vers $\dfrac{-1/3(-3/4)}{1-(-3/4)} = \dfrac{1/4}{7/4} = \dfrac{1}{7}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{e^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{e^2}\right)^n$: Série géométrique de raison $1/e^2 < 1$. Elle converge vers $\dfrac{1/e^2}{1-1/e^2} = \dfrac{1}{e^2-1}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\, 8^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^{n+1}}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 8 \cdot (8/3)^n$; Série géométrique de raison $8/3 > 1$. Donc la série diverge.

(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 4.(4/5)^n$: série géométrique de raison 4/5, elle converge alors vers $\dfrac{4}{1-\frac{4}{5}} = 20$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[2(0.1)^n + (0.2)^n\right] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2(0.1)^n}_{\text{série géométrique de raison } 0.1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (0.2)^n}_{\text{série géométrique de raison } 0.2}$

$$= \frac{0.2}{1-0.1} + \frac{0.2}{1-0.2} = \frac{0.2}{0.9} + \frac{0.2}{0.8}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36}.$$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+9n+6}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3n^2+9n+6} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{6n+9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{6} = 1/3 \neq 0$,

la série diverge par le Test de divergence.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1/n^2+1)}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = 1 \neq 0$. Alors la série diverge par le Test de divergence.

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{1}{3^{n-1}}$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2.(1/2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6(1/3)^n$

$$= \frac{2(1/2)}{1-1/2} + \frac{6(1/3)}{1-1/3} = 2+3=5$$

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} = \frac{(A+B)k + 2A}{k(k+2)} \Rightarrow$$

$$A+B=0, \quad 2A=1 \Rightarrow A=1/2, \; B=-1/2$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+2}, \text{ d'où}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{3}{4}.$$

Comme la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$ converge vers $\frac{3}{4}$, la série converge vers $\frac{3}{4}$.

(12) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{2(A+B)n + A - B}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow$$

$$2(A+B) = 0, \quad A-B=1 \Rightarrow A=1/2, \; B=-1/2$$

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}, \text{ D'où}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = 1/2.$$

Donc, la série converge vers $1/2$.

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{Série géométrique de raison } 1/2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{Série géométrique de raison } 1/3}$$

$$= \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1/3}{1-1/3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right) = \ln(1/2) \neq 0$, la série diverge par le Test de divergence.

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin(1/n) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{1}{k}\right) - \sin\left(\frac{1}{k+1}\right)\right] = \sin 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin(1/2) - \sin(1/3) + \cdots$$

$$+ \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) =$$

$\sin 1 - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\sin 1 - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = \sin 1.$$

Donc, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$ converge vers $\sin 1$.

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+2^{-n}}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5+2^{-n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5+\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{5}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5+2^{-n}} \neq 0$, la série diverge par le test de divergence.

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$. $\lim_{n\to+\infty} \arctan n = \pi/2 \neq 0$, la série diverge.

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n - \ln(n+1)$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}[\ln k - \ln(k+1)] = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + \dots + \ln n - \ln(n+1)$$
$$= \ln 1 - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -\ln(n+1) = -\infty \Rightarrow$ la suite des sommes partielles S_n diverge. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge.

$\boxed{3}$ (1) $0.\overline{5} = 0.555\dots = 0.5 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \dots$

C'est une série géométrique de raison 0.1 et du premier terme 0.5, elle converge alors vers $\frac{0.5}{1-0.1} = \frac{5}{9}$.

(2) $0,\overline{307} = 0.307307307\dots = 0.307 + 0.000307 + 0.000000307 + \dots$

C'est une Série géométrique de raison 0.001 et du premier terme 0.307. (6)

Elle converge alors vers $\frac{0,307}{1-0.001} = \frac{0,307}{0.999} = \frac{307}{999}$

(3) $4,1570\,1570\,1570\ldots = 4 + \underbrace{0.1570 + 0.00001570 + \ldots}_{\text{Série géométrique du premier terme } 0.1570 \text{ et du raison } 0.0001}$

$= 4 + \frac{0.1570}{1-0.0001} = 4 + \frac{1570}{9999} = \frac{41566}{9999}$

$\boxed{4}$ (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ C'est une série géométrique de raison $x-3$.

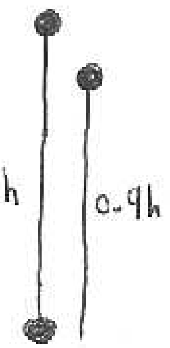
Pour qu'elle converge, il faut que $|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1$

$\Leftrightarrow -2 < x < 4$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$: Série géométrique de raison $3x$.

Elle converge lorsque $|3x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/3 \Leftrightarrow -1/3 < x < 1/3$

5



(a) Après le premier rebond, la distance parcourue est $d_1 = 6 + 2(0.9)6$

Après le deuxième rebond, la distance est

$$d_2 = d_1 + 2(0.9)^2(6) = 6 + 2(0.9)6 + 2(0.9)^2(6)$$

Après le troisième rebond, la distance parcourue est

$$d_3 = d_2 + 2(0.9)^3(6) = 6 + 2(0.9)(6) + 2(0.9)^2(6) + 2(0.9)^3(6)$$

D'où $d_3 = 6 + 10.8\left[1 + 0.9 + (0.9)^2\right] = 6 + 10.8\left[\dfrac{1-(0.9)^3}{1-0.9}\right] = 6 + 108\left[1-(0.9)^3\right]$

(b) Si on rebondir la balle n fois, la distance totale parcourue est $d_n = 6 + 108\left[1-(0.9)^n\right]$. Si la balle est rebondie indéfiniment, la distance totale parcourue est $d = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[6 + 108(1-0.9^n)\right]$

$= 114\,m$.

6 (a) Après l'absorption de la première dose, $S_1 = A$

" " " deuxième dose, $S_2 = A + Ae^{-6K}$

" " " troisième " ,

$$S_3 = A + S_2 e^{-6K} = A + (A + Ae^{-6K})e^{-6K} = A + Ae^{-6K} + Ae^{-12K}$$

En général, après l'absorption de la nième dose,

$$S_n = A + Ae^{-6K} + Ae^{-12K} + \dots + Ae^{-6(n-1)K}$$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\left[A + Ae^{-6K} + Ae^{-12K} + \dots + Ae^{-6(n-1)K}\right]}_{\text{Somme géométrique}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[A\,\frac{1-(e^{-6K})^n}{1-e^{-6K}}\right] = \frac{A}{1-e^{-6K}} < +\infty \Rightarrow \text{Patient pas en danger.}$$

MAT 1722 – Problèmes suggérés –

Tests de Convergence.

[1] Déterminer si la série est convergente ou divergente

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3} \right)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$ (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+5}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{4^n}$ (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n\sqrt{n}}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ (15) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}$.

[2] Déterminer les valeurs de p pour lesquelles la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

est convergente.

1 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^3}$

$$= 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}}_{\substack{\text{série } p \text{ avec}\\ p=3/2>1,\\ \text{elle converge}}} + 3\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}_{\substack{\text{série } p \text{ avec}\\ p=3>1,\\ \text{elle converge}}}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)$ Converge.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$. Soit $f(x)=xe^{-x^2}$, alors $f(x)$ est Continue, positive sur $[1,+\infty[$. De plus, $f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}<0$ sur $[1,+\infty[$. Donc f est décroissante $[1,+\infty[$.

On peut alors appliquer le Test de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x^2}dx$$

$$u=-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2x \Rightarrow dx=\frac{du}{-2x} \Rightarrow \int xe^{-x^2}dx=\int xe^{u}\frac{du}{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-x^2}, \text{ d'où}$$

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}e^{-1}\right]=\frac{1}{2e}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ Converge et par suite $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$ converge.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. On a $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (série-p), alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ est

aussi convergente par le Test de Comparaison.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Posons $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, alors $f(x)$ est continue

positive sur $[1,+\infty[$. De plus $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

< 0 sur $[1,+\infty[$. Donc $f(x)$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

On peut alors appliquer le Test d'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^t =$$

$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1) - \ln 2\right] = +\infty$. L'intégrale impropre

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ diverge et par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, alors f est positive,

continue sur $[2,+\infty[$. De plus $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4}$

$$= \frac{1-2\ln x}{x^3} < 0 \text{ sur } [2,+\infty[$$

Remarquer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ car pour $n=1$, $\frac{\ln n}{n^2} = 0$.

Alors, on peut appliquer le Test d'intégrale :

Posons $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ et $v = -\frac{1}{x}$

$\int \frac{1}{x^2}\ln x \, dx = -\frac{\ln x}{x} - \int -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ (intégration par parties), d'où $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{\ln x}{x^2}dx =$

$\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\right] =$

$\lim_{t\to+\infty}\left[-\left(\frac{1+\ln t}{t}\right) + \frac{1+\ln 2}{2}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{t} + \frac{1+\ln 2}{2}\right] = \frac{1+\ln 2}{2}$

(Règle de l'Hôpital). Donc $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ Converge et par suite

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ Converge aussi.

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Soit $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, alors f est continue, positive sur $[2,+\infty[$. De plus $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2(\ln x)^2} < 0$ sur $[2,+\infty[$. Donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$. On peut alors appliquer le Test d'intégrale :

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x\ln x}dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int\frac{x\,du}{x\,u} = \int\frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|\ln x|$$

$$\int_2^t \frac{1}{x\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^t = \ln|\ln t| - \ln|\ln 2|$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|\ln t| - \ln|\ln 2|\right) = +\infty.$$ Donc

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge et par suite la Série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$. Utilisons le Test de Comparaison ;

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$ pour $n \geq 2$. Comme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (Série p). La Série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

aussi par le test de Comparaison.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$. Utilisons le Test de Comparaison - la

forme limite : Considérer la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^3+n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+n^2} = 1 < +\infty.$$ Comme

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ Converge (Série p), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$

Converge aussi.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+5}$. Comme $\frac{3}{4^n+5} \leq \frac{3}{4^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

et Comme $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une série Convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{4} < 1$), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+5}$ Converge aussi par le Test de Comparaison.

(10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{4^n}$. On a : $1+5^n \geq 5^n \Rightarrow \frac{1+5^n}{4^n} \geq \frac{5^n}{4^n}$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ est divergente (série géométrique de raison $\frac{5}{4} > 1$), la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{4^n}$ diverge aussi par le Test de Comparaison.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$. Comme $\sin^2 n \leq 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$= \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ est Convergente (série p), donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2}{n\sqrt{n}}$ Converge aussi par le Test de Comparaison.

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$. $n(n+3) = n^2+3n \geq n^2 \Rightarrow$

$\frac{3}{n(n+3)} \leq \frac{3}{n^2}$. Mais la série

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ est Convergente (série p), donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ Converge aussi.

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$. utilisons la forme limite du Test de Comparaison avec la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}\,\frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n+6^n}{2^n+6^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n((1/2)^n+1)}{6^n((1/3)^n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1/2)^n+1}{(1/3)^n+1} = 1 < +\infty.$$ Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$ Converge (série géométrique de raison $2/3 < 1$), la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ Converge aussi.

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$. On a : $1+\sqrt{n} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n}$ pour $n \geq 1$

$$= 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

La Série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge (série p), donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ diverge aussi par le Test de Comparaison.

(15) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$. Comparons avec $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2-4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2-4} = 1 < +\infty.$$

Comme la Série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est Convergente (série p), la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}$ Converge aussi par la forme limite du Test de Comparaison.

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$. Comparons avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1/n^2)\cos(1/n)}{(-1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty} \cos(1/n) = 1 < +\infty.$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$ diverge aussi.

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}$. Comparons avec la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^{10}}} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}\, n^{4/3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10/3}-3n^{7/3}}{n^{10/3}\sqrt{1-4/n^8}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-3/n}{\sqrt{1-4/n^8}} = 1.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ converge (série p avec $p = 4/3 > 1$), la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}$ converge aussi par la forme limite du Test de Comparaison.

$\boxed{2}$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$. Considérons plusieurs cas :

Cas 1 $p=1$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$. Soit $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. Clairement f est continue, positive sur $[2,+\infty[$. De plus, $f'(x) = -\frac{(1+\ln x)}{(x\ln x)^2} < 0$

D'où f est décroissante sur $[2,+\infty[$. On peut appliquer alors le Test de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln|\ln x|\right]_2^t =$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \left[\ln|\ln t| - \ln|\ln 2|\right] = +\infty$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge et

par le Test d'intégrale, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

<u>Cas 2</u> <u>$p \neq 1$</u> $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ est continue positive sur $[2,+\infty[$.

De plus $f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2(\ln x)^{p+1}} < 0$ sur $[2,+\infty[$. Donc on peut

appliquer le Test d'intégrale :

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du \Rightarrow \int \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \int \frac{1}{u^p}\,du$$

$$= \frac{u^{-p+1}}{-p+1} = \frac{(\ln x)^{-p+1}}{(-p+1)}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_2^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln t)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right]$$

<u>Cas 2.1</u> <u>$p<1$</u> $\Rightarrow -p+1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln t)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right] = +\infty$

la série diverge dans ce cas car $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ diverge

<u>Cas 2.2</u> <u>$p>1$</u> $\Rightarrow -p+1 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln t)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}\right] = -\frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}$.

la série converge dans ce cas car $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$ converge.