MAT1722 - Problèmes suggérés - Séries alternées - Convergence absolue

1 Testez la convergence ou la divergence de chacune des séries :

(a) $\frac{3}{5} - \frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \frac{3}{9} - \cdots$

(b) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \cdots$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n+1}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{n^2+1}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2+1}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

2 Dites si la série est absolument convergente, semi-convergente ou divergente

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n^2}$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) 5^n}{n\, 3^{2n}}$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/6)}{n\sqrt{n}}$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\, 10^n}$

3 Une série $\sum a_n$ est définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\, a_n$.

Déterminer si la série converge ou diverge

4 Pour quels entiers positifs k la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$

converge-t-elle ?

MAT 1722 - Problèmes suggérés

Test de D'Alembert - Séries entières

1 Déterminer la convergence ou la divergence de chacune des séries suivantes

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{e^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\pi^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3 \cdot 7^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(n+1)^2}$ (8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \frac{3^n}{2^n}$

2 Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon et l'intervalle de convergence.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \, (x + 1/2)^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(-3)^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^{n+1}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} (x+2)^n$

MAT1722 - Solutions des problèmes suggérés - Test de D'Alembert

1 (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{e^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{e^{n+1}}\,\frac{e^n}{(-1)^n n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{e}\right) = +\infty > 1.$$

La série diverge

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\pi^n}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{\pi^{n+1}}\,\frac{\pi^n}{(-1)^n n}\right| =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{n}\,\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} < 1$, la série converge absolument.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n}\right| =$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Pour calculer cette limite, on pose $y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ et on calcule tout d'abord $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln y$

$$\lim_{n\to+\infty}\ln y = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{1/n} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{H}{=}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1(n)-(n+1)}{n^2}}{\left(-1/n^2\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ln y = 1 \Rightarrow \ln\left(\lim_{n\to+\infty} y\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y = e > 1,$$

la série diverge

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!}{(2n+1)!} \frac{(2n-1)!}{n!}\right|$ (2)

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1$, la série converge absolument.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3 . 7^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3}{(n+1)^3 7^{n+1}} \frac{n^3 . 7^n}{3}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{1}{7} = \frac{1}{7} < 1$, la série converge (absolument).

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\ (n+1)!\ (2n)!}{(2n+2)!\ (n!)(n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$

$= \frac{1}{4} < 1$, la série converge absolument.

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n . n}{(n+1)^2}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^{n+1} (n+1)}{(n+2)^2} \frac{(n+1)^2}{2^n . n}\right| =$

$\lim_{n\to+\infty} 2 \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = 2 > 1$, la série diverge

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n^2}{(n+1)!}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1} (n+1)^2}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{2^n n^2} =$

$\lim_{n\to+\infty} 2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{(n+2)} = 0 < 1$, la série converge absolument.

(9) $\sum (-1)^n n^2 \frac{3^n}{2^n}$: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^{n+1} (n+1)^2 \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{(-1)^n n^2 3^n}\right|$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1$, la série diverge

$\boxed{2}$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n} (x+3)^n$: utilisons le test de D'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{4^{n+1}} (x+3)^{n+1} \frac{4^n}{(-1)^n n (x+3)^n} \right| < 1$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} |x+3| \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{4} < 1 \iff |x+3| < 4 \iff$$

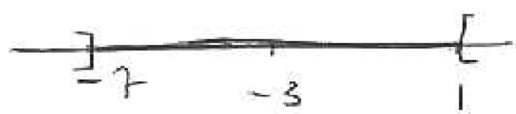
$$-4 < x+3 < 4 \Rightarrow -7 < x < 1.$$

Vérifions la convergence aux points $x=-7$, $x=1$.

$\underline{x=-7}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n (-1)^n 4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$

Cette série diverge car $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0$ (test de divergence)

$\underline{x=1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ diverge pour la même raison. L'intervalle de convergence est alors $]-7, 1[$



et le rayon de convergence est 4

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$. On commence par écrire la série sous la forme standard $\sum C_n (x-a)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} 4^n (x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}(x-2)^n$$

Test de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{8^{n+1}}{(n+1)} (x-2)^{n+1} \frac{n}{8^n (x-2)^n} \right| < 1 \iff$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8n}{n+1} |x-2| < 1 \iff 8|x-2| < 1 \iff |x-2| < \frac{1}{8} \iff$$

$$-\frac{1}{8} < x-2 < \frac{1}{8} \iff \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$$

<u>Testons les points extrémités</u>

<u>$x = 15/8$</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}\left(\frac{15}{8}-2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n} \frac{(-1)^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;

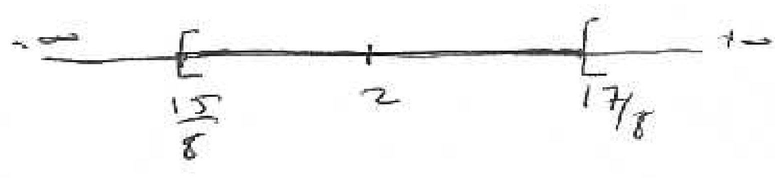
série alternée convergente :

① $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

② $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

<u>$x = 17/8$</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}\left(\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: diverge

Alors l'intervalle de convergence est $\left[\frac{15}{8}, 17/8\right[$



Rayon de convergence $= \frac{1}{8}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x+1/2)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \iff \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{(x+1/2)^{n+1}}{(x+1/2)^n}\right|$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)\,|x+1/2|<1$. Ceci est possible seulement lorsque $x=-1/2$. Donc l'intervalle de convergence est $\{-1/2\}$ et le rayon de convergence est 0.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \iff \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{(x-6)^n}\right|<1$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} |x-6|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)<1$$

Soit $y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Rightarrow \ln y = n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln y = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{1/n}$

$$\underset{[\frac{0}{0}]}{\overset{H}{=}} \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{1\cdot(n+1)-1\cdot(n)}{(n+1)^2}}{-1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=-1$$

$= \ln 1/e \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$, d'où

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|x-6|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=0<1$ pour tout x. Donc la série converge absolument pour tout x

Intervalle de convergence $=]-\infty,+\infty[$

Rayon " " $= +\infty$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{(-1)^n x^{2n}}\right| < 1 \iff$

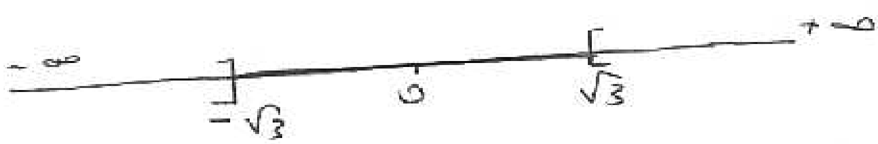
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{3} < 1 \iff \frac{x^2}{3} < 1 \iff x^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

<u>$x = -\sqrt{3}$</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$: diverge

<u>$x = \sqrt{3}$</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$: diverge

Intervalle de Convergence $=]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

Rayon " " $= \sqrt{3}$



(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^{n+1}}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1) x^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{n x^n}\right| < 1 \iff$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} |x| < 1 \iff \frac{|x|}{2} < 1 \iff -2 < x < 2$

$\underline{x = -2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} n$: diverge par le test de divergence

$\underline{x = 2}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$: diverge par le test de divergence

Intervalle de Convergence : $]-2, 2[$

Rayon " " $= 2$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(x+2)^n$: $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}(x+2)^{n+1} \frac{n!}{n^2 (x+2)^n} \right| < 1$

$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n+1}\right) |x+2| = 0 < 1$ pour tout x $\Rightarrow$

La série converge absolument pour tout x

Intervalle de Convergence $=]-\infty, +\infty[$

Rayon " " $= +\infty$.

Solutions des problèmes suggérés -

Longueur d'arc

$\boxed{1}$

(1) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad, 0 \le t \le \pi$

La longueur de cette courbe est donnée par $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t - 2e^{2t}\sin t \cos t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin t \cos t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^t\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{\pi} = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$$

(2). $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \le t \le 3$ $\boxed{\text{Pas dans le manuel}}$

$$L = \int_0^{2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{3} \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (-2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{3} \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} - 2 + 4}\, dt = \int_0^{3} \sqrt{(e^t + e^{-t})^2}\, dt$$

$$= \int_0^{3} (e^t + e^{-t})\, dt = \left[e^t - e^{-t}\right]_0^{3} = e^3 - e^{-3} = \frac{e^6 - 1}{e^3}$$

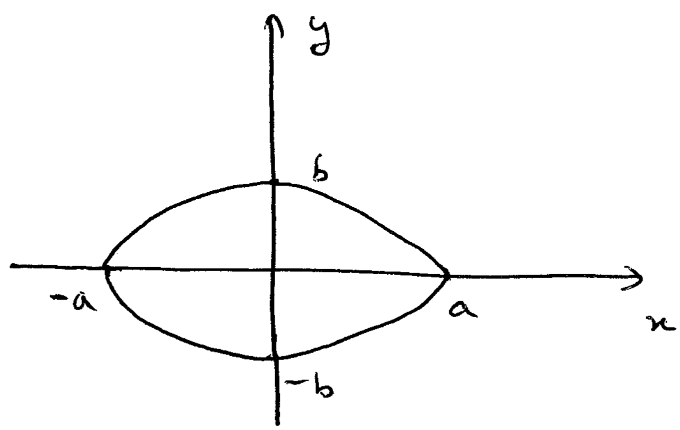
(3) $x = y^{3/2} \; ; \; 0 \le y \le 1$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} y^{1/2}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{4+9y}}{2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (4+9y)^{1/2} dy = \frac{1}{18} \left(\frac{2}{3} (4+9y)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{27} \left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right)$$

(4) $x = a \sin\theta \; , \; y = b \cos\theta \; , \; 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{; ellipse}$$



$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(a\cos\theta)^2 + (-b\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\, d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta) + b^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\sin^2\theta}\, d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\theta} \quad \text{for} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad \text{for} \quad e = \frac{c}{a}.$$

Exercices sur les aires entre deux courbes

[1] Trouver l'aire de la région limitée par les courbes $y = x^2 - 4$, $y = -x + 2$ et les 2 droites $x = -4$ et $x = 3$.

[2] Trouver l'aire de la région limitée par les courbes $x = y^2$, $x = y + 2$

[3] Trouver l'aire de la région limitée par $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 14$

[4] Trouver l'aire de la région limitée par $y = |x|$, $y = (x+2)^2 - 9$

[5] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$

[6] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y = x^2$, $y = \frac{2}{x^2+1}$

[7] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y = x$, $y = \ln x$, $x = 1$, $x = 2$

[8] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $x + y^2 = 2$, $x + y = 0$

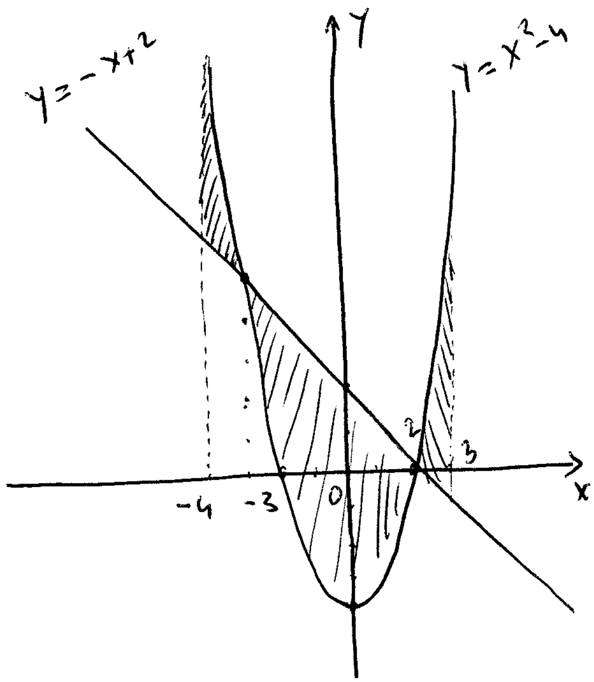
[9] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y = x^4 - x^2$, $y = 1 - x^2$

[10] 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y = x^2 - x$, $y = x^3 - 4x^2 + 3x$

[11] La tangente en $(1,1)$ à la parabole $y = x^2$ forme avec l'axe des x une région bien définie, calculer son aire.

Solutions des problèmes suggérés sur les aires

[1] $y = x^2 - 4$, $y = -x + 2$, $x = -4$, $x = 3$



Commençons par trouver les points d'intersection :

$$x^2 - 4 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

L'aire en question est alors

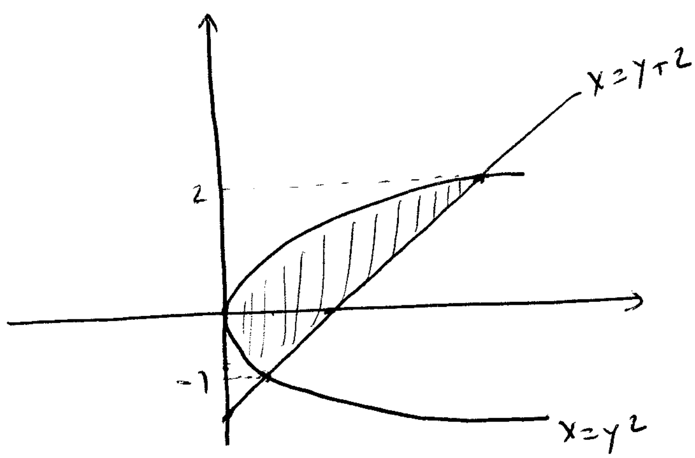
$$\int_{-4}^{-3} \left[(x^2-4) - (-x+2)\right] dx + \int_{-3}^{2} \left[(-x+2) - (x^2-4)\right] dx$$

$$+ \int_{2}^{3} \left[(x^2-4) - (-x+2)\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} +$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{3} = \frac{17}{6} + \frac{125}{6} + \frac{17}{6} = \frac{53}{2}$$

[2] $x = y^2$, $x = y + 2$



Trouvons tout d'abord les points d'intersection :

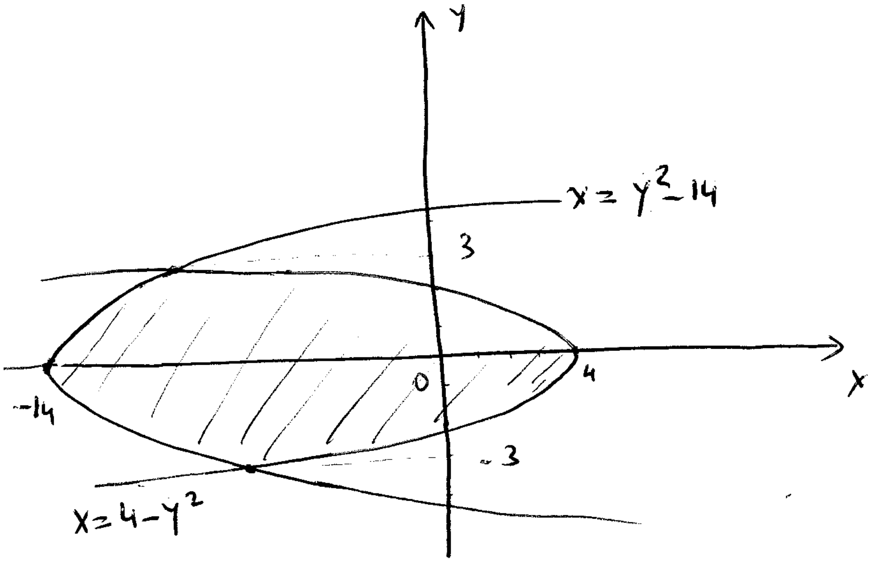
$$y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$y = -1, \ y = 2$$

L'aire en question est alors $\displaystyle\int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$

3 $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 14$



$$4 - y^2 = y^2 - 14 \Rightarrow$$
$$2y^2 = 18 \Rightarrow y = \pm 3$$

L'aire en question est

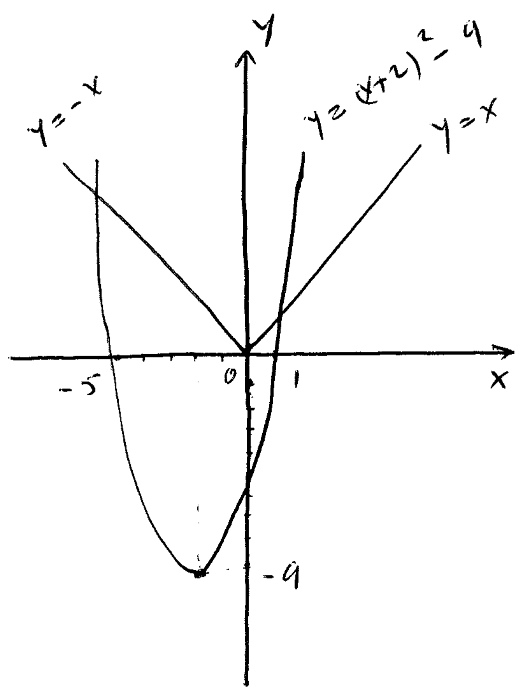
$$\int_{-3}^{3} \left[(4-y^2) - (y^2-14)\right] dy$$

$$= \int_{-3}^{3} (-2y^2 + 18)\, dy = \left[-\frac{2}{3}y^3 + 18y\right]_{-3}^{3}$$

$$= 72$$

4 $y = |x|$, $y = (x+2)^2 - 9$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$(x+2)^2 - 9 = x \Rightarrow$$
$$x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$(x+2)^2 - 9 = -x \Rightarrow$$
$$x^2 + 5x - 5 = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{-5 - \sqrt{45}}{2}$$

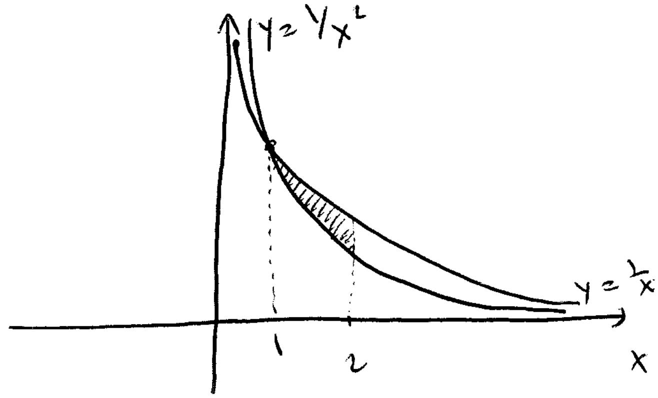
L'aire en question est alors

$$\int_{\frac{-5-\sqrt{45}}{2}}^{0} \left(-x - (x^2+4x-5)\right) dx +$$

$$\int_{0}^{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}} \left(x - (x^2+4x-5)\right) dx =$$

$$\frac{45\sqrt{5}}{4} + \frac{29\sqrt{29}}{12} + \frac{79}{6}$$

[5] $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$, $x=1$, $x=2$



$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow$

$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

mais les fonctions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ ne sont pas définies à $0 \Rightarrow$ $x=1$ est le seul point d'intersection

L'aire cherchée est alors $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x}\right]_1^2 =$

$\ln 2 + \frac{1}{2} - (\ln 1 + 1) = (\ln 2) - \frac{1}{2}$.

[6] $y=x^2$, $y=\frac{2}{x^2+1}$. Commençons par tracer la fonction $y=\frac{2}{x^2+1}$.

Le domaine de cette fonction est $(-\infty,+\infty)$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}\right)=0^+ \Rightarrow y=0$ (l'axe des x) est une asymptote horizontale

$$y'=\frac{0(x^2+1)-4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$y'=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$y''=\frac{-4(x^2+1)^2-2(x^2+1)(2x)(-4x)}{(x^2+1)^4}=\frac{-4(x^2+1)+16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{8x^2-4}{(x^2+1)^3}$$

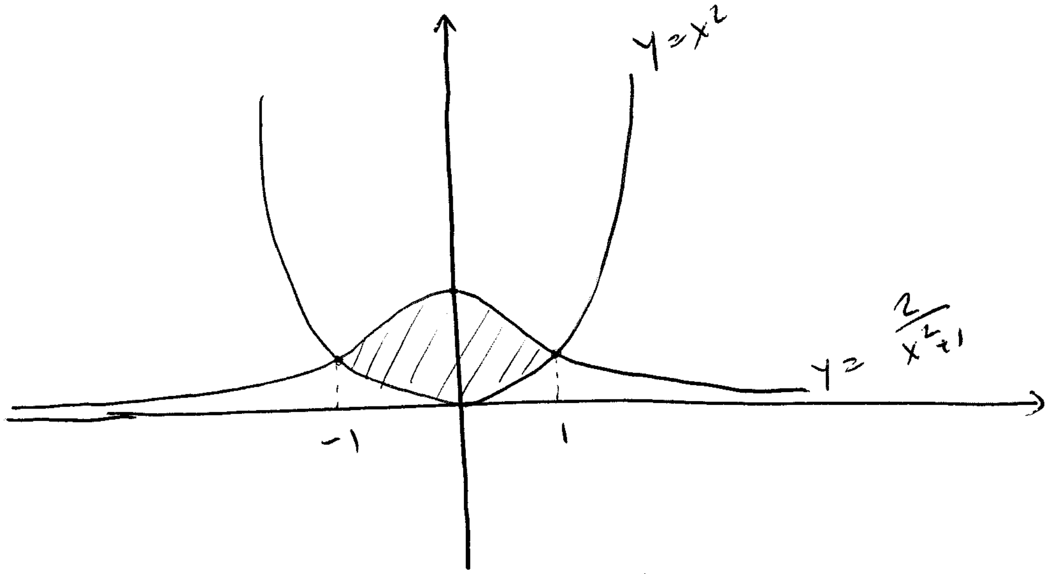
$$y''=0 \Rightarrow 8x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$y'' = \dfrac{8x^2-4}{(x^2+1)^3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		Concave vers le haut		Concave vers le bas		Concave vers le haut	

Trouvons ensuite les points d'intersection de deux courbes :

$$\frac{2}{x^2+1} = x^2 \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff (x^2-1)(x^2+2) = 0$$

$$\iff x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

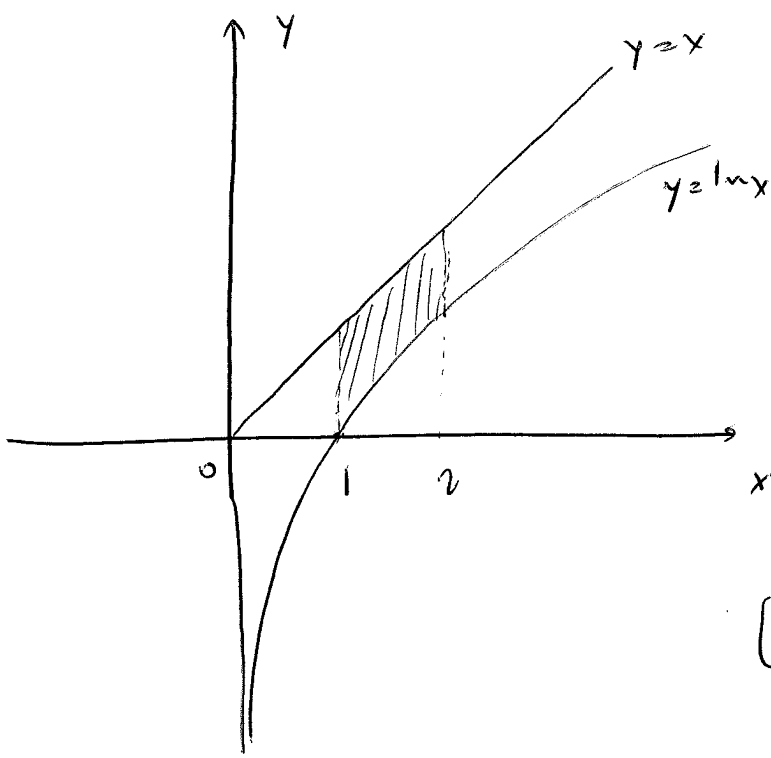


L'aire en question est alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx =$

$$\left[2\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 - \frac{1}{3} - \left(2\,\mathrm{Arctan}(-1) + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + 2\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

$\boxed{7}$ $y = x,\quad y = \ln x\ ,\ x = 1,\ x = 2$



Remarquer que

$x > \ln x$ pour $x > 0$

L'aire demandée est

alors

$$\int_1^2 (x - \ln x)\, dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \ln x \, dx$$

Pour $\int \ln x \, dx$, on procède par parties :

$u = \ln x,\qquad v' = 1 \quad \Rightarrow u' = \frac{1}{x},\ v = x$

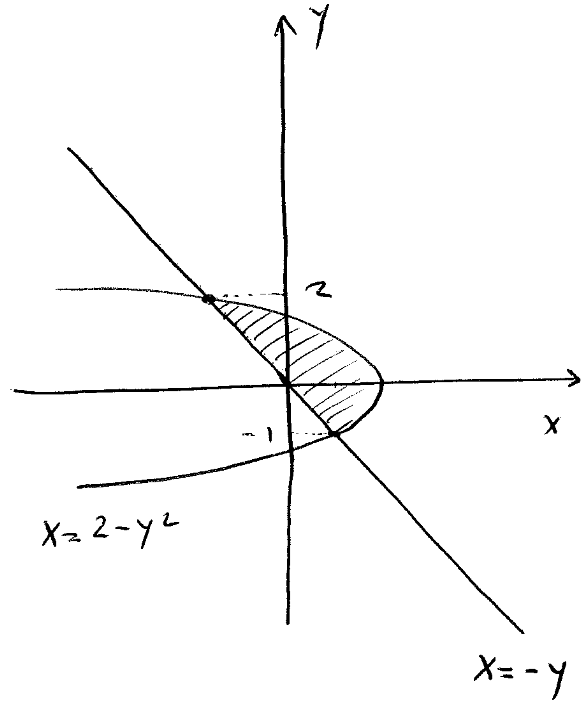
$$\int \ln x \, dx = uv - \int u'v \, dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\, x \, dx =$$

$$x\ln x - x \quad \text{et} \quad \int_1^2 (x - \ln x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\ln x + x\right]_1^2 = \frac{5}{2} - 2\ln 2$$

$\boxed{8}$ $x + y^2 = 2,\qquad x + y = 0$. Ici, il est plus facile à exprimer x en fonction de y dans les deux courbes

$$x + y^2 = 2 \Rightarrow x = 2 - y^2 \quad \text{et} \quad x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

Traçons ces deux courbes :



$2 - y^2 = -y \Rightarrow$

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow$

$(y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow$

$y = -1 , y = 2$

L'aire cherchée est alors

$$\int_{-1}^{2} \left[2 - y^2 - (-y)\right] dy =$$

$$\int_{-1}^{2} (-y^2 + y + 2)\, dy =$$

$$\left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

$\boxed{9}$ $y = x^4 - x^2$, $y = 1 - x^2$

Pour la fonction $x^4 - x^2$, le domaine est clairement $(-\infty, +\infty)$

$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

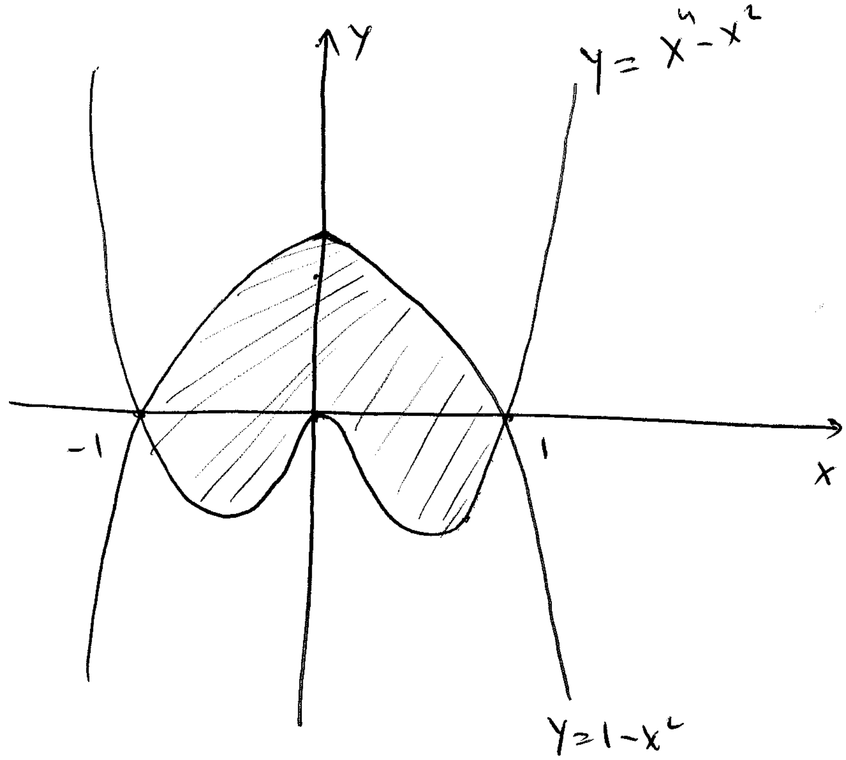
x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
$y' = 2x(2x^2-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$y'' = 12x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

	$-\infty$		$-1/\sqrt{6}$		$1/\sqrt{6}$		$+\infty$
$y'' = 12x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		C. haut		C. bas		C. haut	

L'intersection des deux courbes est donnée par :

$$x^4 - x^2 = 1 - x^2 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$



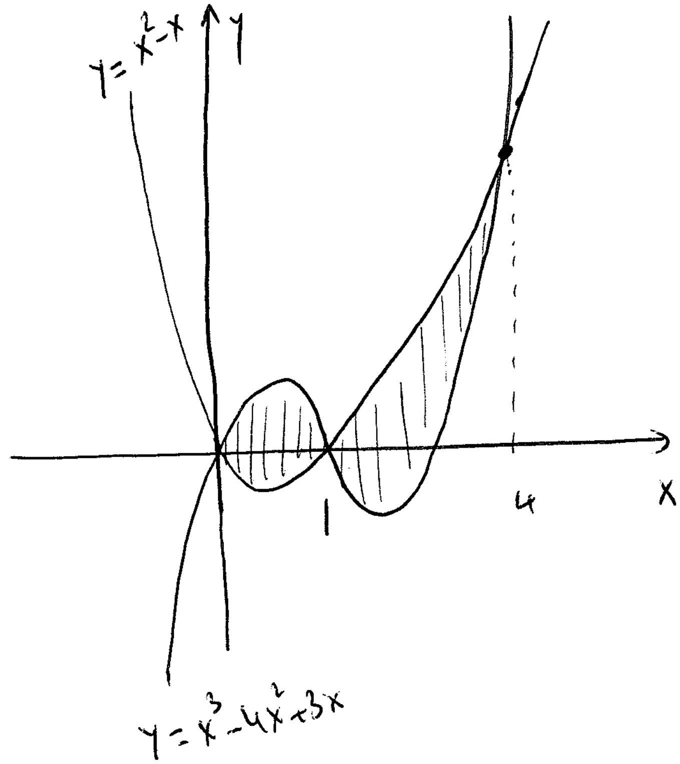
L'aire en question est alors

$$\int_{-1}^{1} \left[1 - x^2 - (x^4 - x^2)\right] dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\, dx = \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}.$$

10 $y = x^2 - x$, $y = x^3 - 4x^2 + 3x$: les deux courbes sont "faciles" à tracer. Trouvons leurs points d'intersection

$$x^2 - x = x^3 - 4x^2 + 3x \iff x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \iff x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 4$$

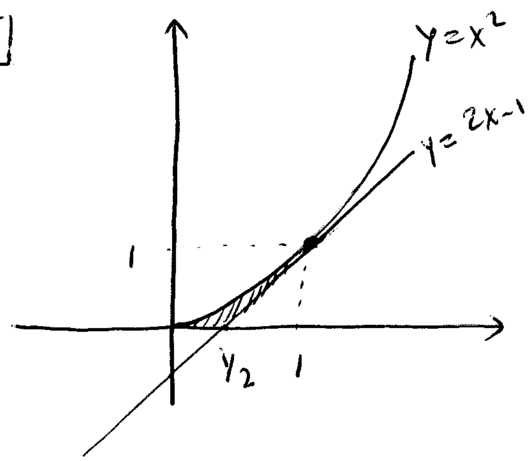


L'aire cherchée est alors $\int_0^1 [(x^3 - 4x^2 + 3x) - (x^2 - x)]\,dx + \int_1^4 [(x^2 - x) - (x^3 - 4x^2 + 3x)]\,dx$

$$= \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x)\,dx + \int_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2\right]_1^4$$

$$= \frac{71}{6}$$

$\boxed{11}$



$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$. Au point (1,1) $y' = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ est l'équation de la droite tangente

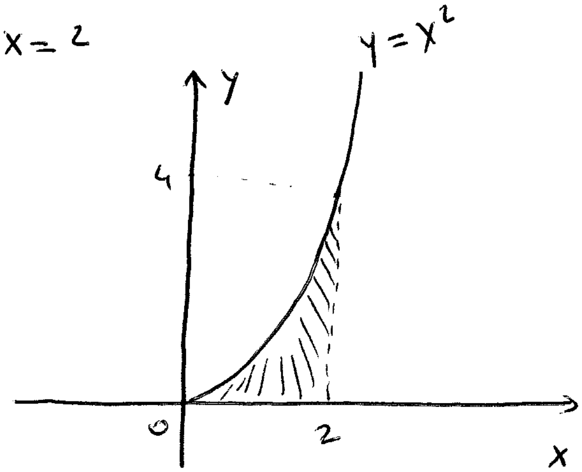
L'aire en question est alors

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y+1) - \sqrt{y}\right) dy =$$

$$\left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Solutions des problèmes supplémentaires sur le Centre de masse

1 $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$



$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx$$

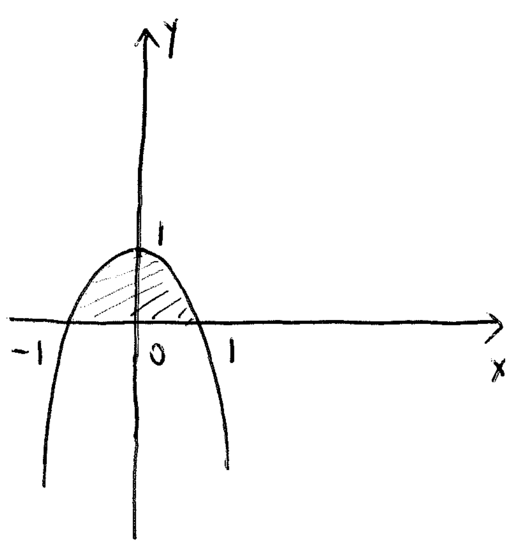
$$A = \int_0^2 (x^2 - 0)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8}\int_0^2 x\left[x^2 - 0\right]dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8}\int_0^2 \frac{1}{2}\left[x^4 - 0\right]dx = \frac{3}{16}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6}{5}.$$

Le centre de masse est alors le point $\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right)$

2 $y = 1 - x^2$, $y = 0$



L'aire de la région est

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx =$$

$$\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

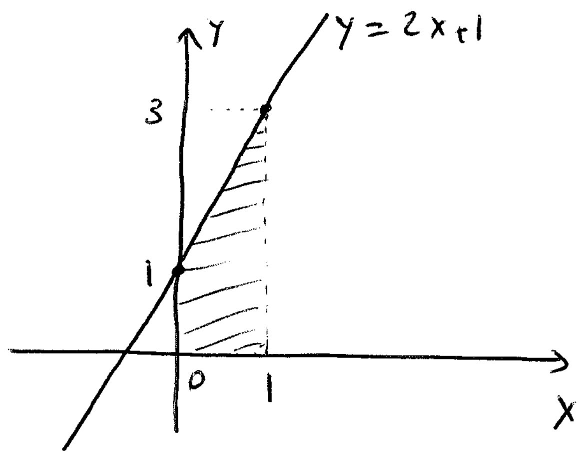
$$\bar{x} = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x\left[1-x^2-0\right]dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] = 0$$

Ceci est normal car la région est symétrique par rapport à l'axe des y

$$\bar{y} = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[(1-x^2)^2-0^2\right]dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}(1+x^4-2x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[x+\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3}{8}\left[1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\left(-1-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{3}{8}\,\frac{16}{15} = \frac{2}{5}.$$ Le centre de masse est alors le point $\left(0, \frac{2}{5}\right)$

$\boxed{3}$ $y = 2x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.



L'aire de la région est

$$A = \int_0^1 (2x+1-0)\,dx = \left[x^2+x\right]_0^1 = 2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x(2x+1-0)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1(2x^2+x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

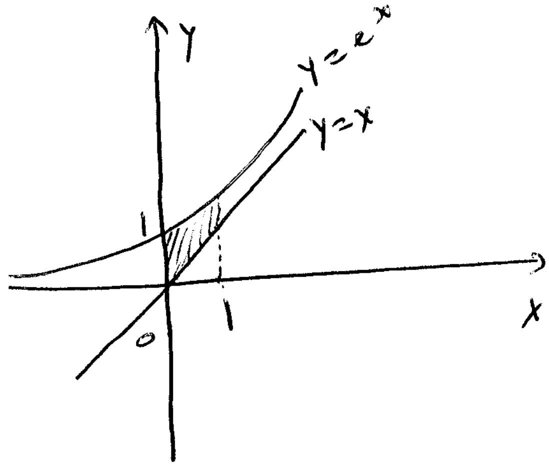
$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right] = \frac{7}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{2}\left[(2x+1)^2-0^2\right]dx = \frac{1}{4}\int_0^1(4x^2+4x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}+2+1\right] = \frac{13}{12}.$$

Le centre de masse est alors le point $\left(7/12, \frac{13}{12}\right)$

$\boxed{4}$ $y = e^x,\ y = x,\ x = 0,\ x = 1$



L'aire de la région est

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{2e-3}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{2e-3}\int_0^1 x(e^x - x)\,dx = \frac{2}{2e-3}\left[\int_0^1 x e^x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx\right]$$

Pour $\int_0^1 x e^x\,dx$, on procède par parties :

$u = x,\ v' = e^x \Rightarrow u' = 1,\ v = e^x \Rightarrow$

$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x$, d'où

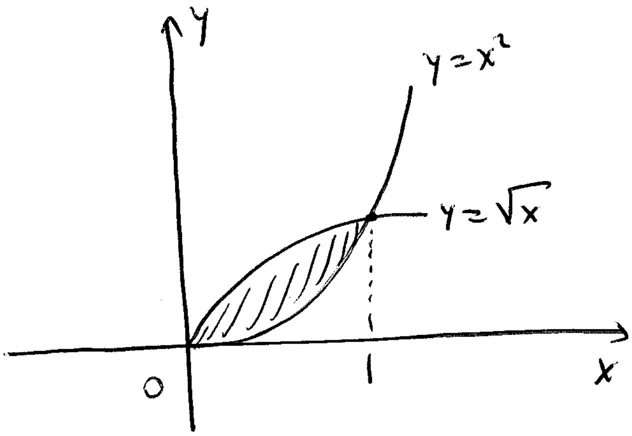
$$\bar{x} = \frac{2}{2e-3}\left[\, x e^x - e^x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right] = \frac{2}{2e-3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3(2e-3)}$$

$$\bar{y} = \frac{2}{2e-3}\int_0^1 \frac{1}{2}\left[(e^x)^2 - x^2\right]dx = \frac{1}{2e-3}\int_0^1 (e^{2x} - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2e-3}\left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2e-3}\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3e^2-5}{6(2e-3)}$$

Le centre de masse est alors le point $\left(\frac{8}{3(2e-3)},\ \frac{3e^2-5}{6(2e-3)}\right)$.

(5) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$



L'aire de la région est

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

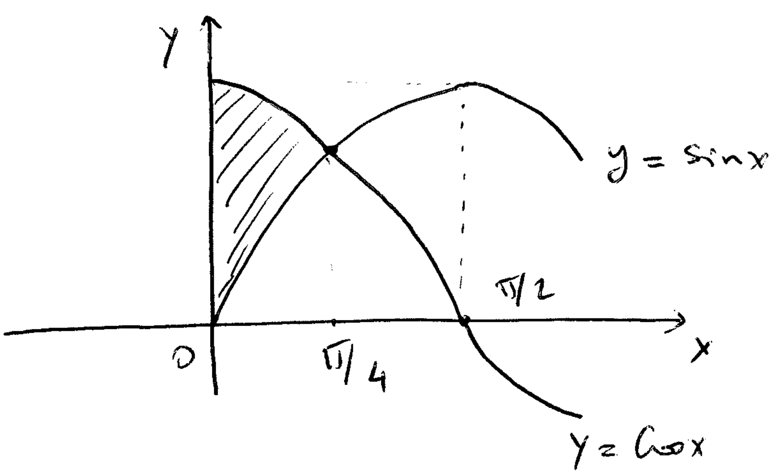
$$\bar{x} = 3 \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\, dx = 3 \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\, dx = 3 \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{1}{4} x^4\right]_0^1$$

$$= 3 \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right] = \frac{9}{20}$$

$$\bar{y} = 3 \int_0^1 \frac{1}{2}\left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{20}.$$

Le centre de masse est alors le point $\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$.

[6] $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$



L'aire de la région est

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\pi/4} x\left[\cos x - \sin x\right]dx = (\sqrt{2}+1)\int_0^{\pi/4}(x\cos x - x\sin x)\,dx$$

Pour $\int x\cos x\,dx$, on procède par parties :

$u = x,\quad v' = \cos x \Rightarrow u' = 1,\ v = \sin x \Rightarrow$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/4} x\cos x\,dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8}{8} = \frac{(\pi+4)\sqrt{2} - 8}{8}$$

Pour $\int x\sin x\,dx$, on procède aussi par parties

$u = x,\quad v' = \sin x \Rightarrow u' = 1,\quad v = -\cos x$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\pi+4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$$

D'où $\bar{x} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)\left[(\pi+4)\sqrt{2} - 8\right]}{8} - \dfrac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}(4-\pi)}{8}$

$$= \frac{2\pi + \cancel{8} - \cancel{8\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} + \cancel{4\sqrt{2}} - \cancel{8} - \cancel{8} + 2\pi - \cancel{4\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2}\pi}}{8}$$

$$= \frac{4\pi + 2\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2} - 8}{8} = \frac{\pi(2+\sqrt{2}) - 4(1+\sqrt{2})}{4}$$

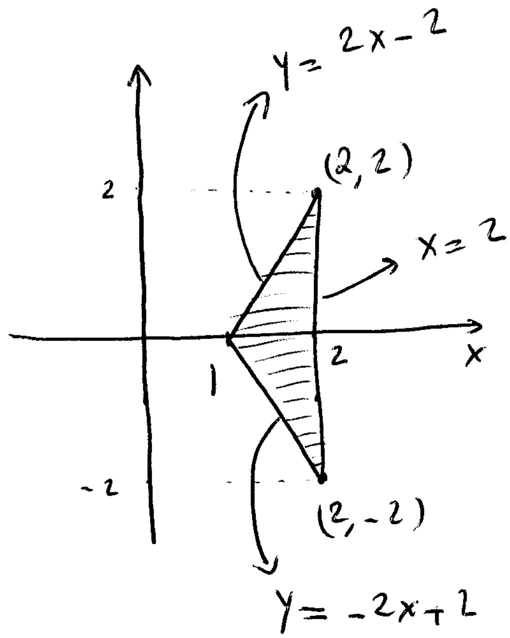
$$\bar{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\left[\cos^2 x - \sin^2 x\right]dx = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2} - \frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{4}\int_0^{\pi/4} 2\cos(2x)\,dx = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\,\frac{1}{2}\Big[\sin(2x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}.$$

Alors le centre de masse est le point

$$\left(\frac{\pi(2+\sqrt{2})-4(1+\sqrt{2})}{4},\ \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right)$$

$\boxed{7}$



Remarquer que les côtés du triangle sont les droites d'équations : $y = 2x-2$, $y=-2x+2$ et $x = 2$

L'aire du triangle est

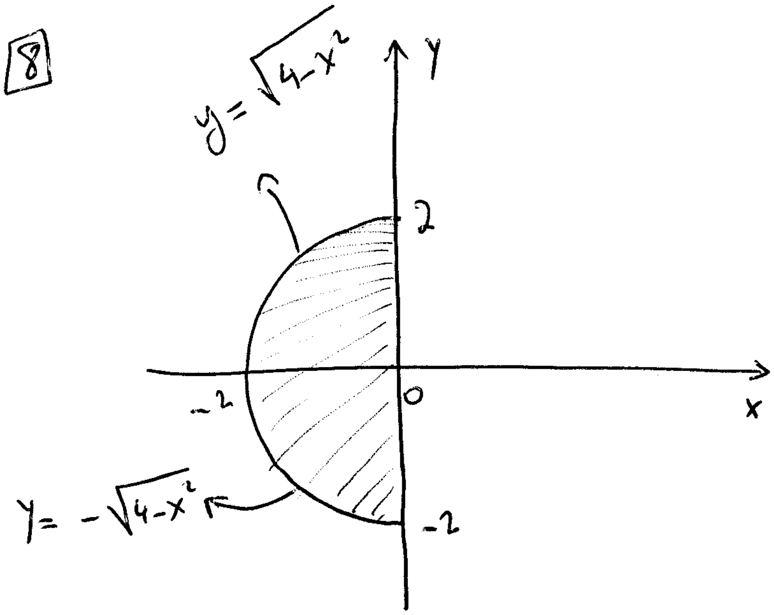
$$\int_1^2 \big[2x-2-(-2x+2)\big]\,dx = 2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\int_1^2 x\big[(2x-2)-(-2x+2)\big]dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x(4x-4)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{32}{3} - 8 - \Big(\frac{4}{3}-2\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\Big] = \frac{5}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2}\Big[(2x-2)^2 - (-2x+2)^2\Big]dx = 0$$: C'est attendu car la région présente une symétrie par rapport à l'axe des x.

$\boxed{8}$



L'aire de la région est

$$A = \frac{\pi\, 2^2}{2} = 2\pi.$$

Comme la région présente une symétrie par rapport à l'axe des x, on s'attend à ce que $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0} x\left[\sqrt{4-x^2} - \left(-\sqrt{4-x^2}\right)\right] dx = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{0} x\sqrt{4-x^2}\, dx$$

Posons $z = 4-x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-2x}$

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int x\sqrt{z}\,\frac{dz}{-2x} = -\frac{1}{2}\int z^{1/2}dz = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,z^{3/2} = -\frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{3\pi}\left[\sqrt{(4-x^2)^3}\right]_{-2}^{0} = -\frac{1}{3\pi}\left[8-0\right] = -\frac{8}{3\pi}$$

Le centre de masse est alors le point $\left(-\frac{8}{3\pi}, 0\right)$

9 (a) Le Centre de masse est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(1+kx^2)\,dx}{\int_0^1 (1+kx^2)\,dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2} + k\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[x + k\frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{k}{4}}{1 + \frac{k}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2+k}{4}}{\frac{3+k}{3}} = \frac{3}{4}\left(\frac{2+k}{3+k}\right)$$

(b) soit $f(k) = \frac{3}{4}\left(\frac{2+k}{3+k}\right) \Rightarrow f'(k) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{(3+k)^2} > 0$.

Alors f est une fonction croissante de k.

$f(0) = 0.5$ est alors la plus petite valeur de $f(k)$

Noter aussi que $\lim_{k \to +\infty} f(x) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

d'où $\quad 0.5 < f(k) < 0{,}75$

$$\Rightarrow \quad 0.5 < \bar{x} < 0{,}75$$

MAT 1722 - Problèmes suggérés - Équations différentielles séparables - Méthode d'Euler

1 Résoudre chacune des ÉD suivantes :

(1) $y' + x^2 y' = xy$

(2) $2yy' = x(y^2+1)$

(3) $y' = 3y(2-y)$

(4) $y' = 3y(4-y^2)$

(5) $y^3 y' = 4x\sin x$

2 Résoudre chacun des problèmes :

(1) $y' = \dfrac{x-1}{y^2}$; $y(0) = 2$

(2) $y' = \dfrac{\tan y}{x}$; $y(1) = \pi/2$

(3) $y' = 2y(5-y)$; $y(0) = 4$

(4) $y' = \dfrac{(y^2+4)^2}{x(x-1)}$; $y(2) = 0$

(5) $y' = \dfrac{\sqrt{3-y^2}}{x^2}$; $y(1) = 0$

(6) $y' = 9xe^{-x} + y^2 x e^{-x}$; $y(0) = 0$

3 Dans chaque cas, utiliser la méthode d'Euler avec le pas indiqué pour estimer la valeur de $y(a)$ où y est la solution de l'ÉD la condition initiale.

(1) $y' = 2xy$, $y(0) = 1$, $a = 1$, $h = 0.2$

(2) $y' = 4y - y^2$, $y(0) = 1$, $a = 2$, $h = 0.4$

(3) $y' = \dfrac{x}{y^2}$, $y(0) = 2$, $a = 3.2$, $h = 0.8$

4 Résoudre chacune des ÉD de la question 3 et estimer l'erreur dans les valeurs de $y(a)$ trouvées.

②

5 Une tasse de café ayant une température de 60 °C est mise sur la table d'une cuisine dont la température est maintenue constante à 22 °C. 5 minutes plus tard, la température du café est 57 °C

(1) Écrivez une équation différentielle satisfaite par la température T du café

(2) Résolvez cette équation différentielle pour trouver la température T à n'importe quel instant.

(3) Tracer le graphe de la température

6 À 10:07 am, un agent de police est trouvé mort. À côté de lui, il y avait sa glasse de martini qui, selon son "bartender", lui a été servi à 40 °F. La classe était encore pleine. La température du martini change de 60 °F à 61 °F dans les deux minutes de 10:07 à 10:09 am. Si la température ambiante est maintenue constante à 70 °F, trouver le temps du meurtre.

MAT1722- Solutions des problèmes suggérés

$\boxed{1}$ (1) $y' + x^2 y' = xy \Rightarrow y'(1+x^2) = xy \Rightarrow y' = \dfrac{xy}{1+x^2} \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{x}{1+x^2}\,dx \Rightarrow$

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C \Rightarrow y = e^{\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+C}$

$= A\sqrt{x^2+1}$ où $A = e^C$ est une constante.

(2) $2yy' = x(y^2+1) \Rightarrow y' = \dfrac{x(y^2+1)}{2y} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(y^2+1)}{2y} \Rightarrow$

$\dfrac{2y}{y^2+1}\,dy = x\,dx \Rightarrow \int \dfrac{2y}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \ln(y^2+1) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\Rightarrow y^2+1 = Ae^{x^2/2}$ (où $A = e^C$) et $y^2 = Ae^{x^2/2} - 1$.

Remarquer ici qu'on ne peut pas trouver y explicitement en fonction de x.

(3) $y' = 3y(2-y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3y(2-y) \Rightarrow \dfrac{dy}{y(2-y)} = 3\,dx \Rightarrow$

$\int \dfrac{dy}{y(2-y)} = 3x + C.$ (*)

$\dfrac{1}{y(2-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{2-y} = \dfrac{2A + (B-A)y}{y(2-y)} \Rightarrow 2A + (B-A)y = 1 \Rightarrow$

$A = 1/2$, $B = 1/2$ et $\dfrac{1}{y(2-y)} = \dfrac{1/2}{y} + \dfrac{1/2}{2-y} \Rightarrow \int \dfrac{1}{y(2-y)}\,dy$

$= \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|2-y| = \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y}{2-y}\right|$. D'où (*) devient

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = 3x+C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = 6x+A$ où $A = 2C$

et $\frac{y}{2-y} = Be^{6x}$ (où $B = e^{A}$) $\Rightarrow y = 2Be^{6x} - Bye^{6x} \Rightarrow$

$(1+Be^{6x})y = 2Be^{6x}$ et $y = \dfrac{2Be^{6x}}{1+Be^{6x}}$

(4) $y' = 3y(4-y^2) \Rightarrow \dfrac{dy}{y(4-y^2)} = 3\,dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y(4-y^2)} = 3x+C$

$$\frac{1}{y(4-y^2)} = \frac{1}{y(2-y)(2+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2-y} + \frac{C}{2+y} =$$

$$\frac{4A - Ay^2 + 2By + By^2 + 2Cy - Cy^2}{y(4-y^2)} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -A+B-C=0 \\ 2B+2C=0 \\ 4A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{8},\ C = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{y(4-y^2)} = \frac{1/4}{y} + \frac{1/8}{2-y} - \frac{1/8}{2+y} \Rightarrow \int \frac{1}{y(4-y^2)} = \frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{8}\ln|2-y| - \frac{1}{8}\ln|2+y|$$

$$= \frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{8}\ln|4-y^2| = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{y^2}{4-y^2}\right|$$

D'où $\displaystyle\int \frac{dy}{y(4-y^2)} = 3x+C$ implique : $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{y^2}{4-y^2}\right| = 3x+C \Rightarrow$

$\ln\left|\frac{y^2}{4-y^2}\right| = 24x+A$ (où $A = 8C$) et $\frac{y^2}{4-y^2} = Be^{24x}$, $(B = e^{A})$

$\Rightarrow y^2 = 4Be^{24x} - Be^{24x}y^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{4Be^{24x}}{1+Be^{24x}}$

(5) $y^3 y' = 4x\sin x \Rightarrow y^3 dy = 4x \sin x\, dx \Rightarrow \frac{1}{4}y^4 = 4\int x \sin x\, dx$

Pour $\int x \sin x\, dx$, on procède par parties :

$u = x,\ v' = \sin x \Rightarrow u' = 1,\ v = -\cos x$

$\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\, dx = -x\cos x + \sin x$

D'où $\frac{1}{4}y^4 = -4x\cos x + 4\sin x + C$ et $y^4 = -16x\cos x + 16\sin x + A.$

$\boxed{2}$ (1) $y' = \frac{x-1}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = (x-1)dx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{x^2}{2} - x + C$

$\Rightarrow y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + A$

$y(0) = 2 \Rightarrow 2^3 = A \Rightarrow A = 8$ et $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 3x + 8}$

(2) $y' = \frac{\tan y}{x}$, $y(1) = \pi/2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{\tan y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}dy = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin y| = \ln|x| + C \Rightarrow$

$\sin y = Ae^{\ln|x|} = Ax \Rightarrow y = \operatorname{Arcsin}(Ax)$

$y(1) = \pi/2 \Rightarrow \pi/2 = \operatorname{Arcsin}(A) \Rightarrow A = \sin(\pi/2) = 1.$ D'où

$y = \operatorname{Arcsin} x$

(3) $y' = 2y(5-y)$; $y(0) = 4$

$\frac{dy}{y(5-y)} = 2\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(5-y)} = 2x + C.$

Pour $\displaystyle\int \frac{dy}{y(5-y)}$, on procède par fractions partielles : (4)

$$\frac{1}{y(5-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{5-y} = \frac{5A + (B-A)y}{y(5-y)} \Rightarrow 5A + (B-A)y = 1 \Rightarrow$$

$$A = B = 1/5 \quad \text{et alors} \quad \frac{1}{y(5-y)} = \frac{1/5}{y} + \frac{1/5}{5-y} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y(5-y)}\,dy = \frac{1}{5}\ln|y| - \frac{1}{5}\ln|5-y| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{y}{5-y}\right|$$

D'où $\displaystyle \frac{1}{5}\ln\left|\frac{y}{5-y}\right| = 2x + C \Rightarrow \frac{y}{5-y} = Ae^{10x} \Rightarrow y = 5Ae^{10x} - Ae^{10x}y$

et alors $\displaystyle y = \frac{5Ae^{10x}}{1 + Ae^{10x}}$

$$y(0) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{5A}{1+A} \Rightarrow 5A = 4 + 4A \Rightarrow A = 4$$

$$y = \frac{20\,e^{10x}}{1 + 4e^{10x}}$$

(4) $\displaystyle y' = \frac{(y^2+4)^2}{x(x-1)}$, $\quad y(2) = 0$

$$\frac{dy}{(y^2+4)^2} = \frac{dx}{x(x-1)} \Rightarrow \int \frac{dy}{(y^2+4)^2} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

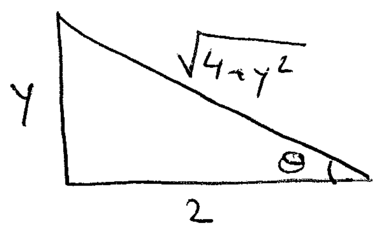
Pour $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+4)^2}$, utilisons la substitution trigonométrique

$$y = 2\tan\theta \,; \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

Alors $dy = 2\sec^2\theta\, d\theta$ et $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16(1+\tan^2\theta)^2} =$

$$\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int [1+\cos(2\theta)]\,d\theta = \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right] = \frac{\theta}{16} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{16}$$



$$= \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}\right)\frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{8}\,\frac{y}{(4+y^2)}$$

Pour $\int \frac{dx}{x(x-1)}$, on procède par fractions partielles:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)} \Rightarrow A+B=0 \text{ et } A=-1$$
$$\Rightarrow A=-1,\ B=1$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

on obtient alors que

$$\frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y}{8(4+y^2)} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

$$y(2)=0 \Rightarrow C = -\ln(1/2) = \ln 2$$

$$\frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y}{8(4+y^2)} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln 2 = \ln\left|\frac{2(x-1)}{x}\right|$$

ici, y ne peut pas être trouvée explicitement en fonction de x.

(5) $y' = \frac{\sqrt{3-y^2}}{x^2}$; $y(1)=0$

$$\frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$. Posons $u = \frac{y}{\sqrt{3}} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{3}} dy \Rightarrow$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{Arcsin}(u) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

D'où $\operatorname{Arc sin}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{x} + C$.

$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$

$\operatorname{Arc sin}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{x} + 1 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{3}} = \sin\left(-\frac{1}{x} + 1\right)$ et $y = \sqrt{3} \sin\left(-\frac{1}{x} + 1\right)$

(6) $y' = 9xe^{-x} + y^2 x e^{-x}$; $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-x}(9+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{9+y^2} = xe^{-x}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{9+y^2} = \int xe^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{3}\right) = \int xe^{-x}\,dx$$

Pour $\int xe^{-x}\,dx$, on procède par parties:

$u = x$, $v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1$, $v = -e^{-x}$

$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$. D'où

$$\frac{1}{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{3}\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = -1 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{y}{3}\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \Rightarrow \text{Arctan}(y/3) = -3xe^{-x} - 3e^{-x} + 3$ (7)

et $y = 3\tan(-3xe^{-x} - 3e^{-x} + 3)$

$\boxed{3}$ (1) $y' = 2xy$, $y(0) = 1$

Ici, $f(x,y) = 2xy$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$. Il faut estimer $y(1)$

$x_{n+1} = x_n + h$, $y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)$

$x_1 = x_0 + 0.2 = 0.2$, $y_1 = 1 + 0.2[2(0)(1)] = 1$

$x_2 = x_1 + h = 0.4$, $y_2 = 1 + 0.2[2(0.2)(1)] = 1.08$

$x_3 = x_2 + h = 0.6$, $y_3 = 1.08 + 0.2[2(0.4)(1.08)] = 1.2528$

$x_4 = x_3 + h = 0.8$, $y_4 = 1.2528 + 0.2[2(0.6)(1.2528)] = 1.553472$

$x_5 = x_4 + h = 1$, $y_5 = 1.553472 + 0.2[2(0.8)(1.553472)] = 2.05058304$

D'où $y(1) \simeq 2.050583$

(2) $y' = 4y - y^2$, $y(0) = 1$, $a = 2$, $h = 0.4$

Ici, $f(x,y) = 4y - y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Il faut estimer $y(2)$

$x_1 = x_0 + h = 0.4$, $y_1 = 1 + 0.4[4(1) - 1^2] = 2.2$

$x_2 = 0.8$, $y_2 = 2.2 + 0.4[4(2.2) - 2.2^2] = 3.784$

$x_3 = 1.2$, $y_3 = 3.784 + 0.4[4(3.784) - 3.784^2] = 4.1109376$

$x_4 = 1.6$, $y_4 = 4.1109376 + 0.4[4(4.1109376) - 4.1109376^2] = 3.928514$

$x_5 = 2$, $y_5 = 3.928514 + 0.4[4(3.928514) - 3.928514^2] = 4.040847$

D'où $y(2) \simeq 4.040847$

(3) $y' = \frac{x}{y^2}$, $y(0) = 2$, $a = 3.2$, $h = 0.8$

Ici, $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

$x_1 = 0.8$, $y_1 = 2 + 0.8\left[\frac{0}{2^2}\right] = 2$

$x_2 = 1.6$, $y_2 = 2 + 0.8\left[\frac{0.8}{2^2}\right] = 2.16$

$x_3 = 2.4$, $y_3 = 2.16 + 0.8\left[\frac{1.6}{(2.16)^2}\right] = 2.434348$

$x_4 = 3.2$, $y_4 = 2.434348 + 0.8\left[\frac{2.4}{(2.434348)^2}\right] = 2.758341516$

D'où $y(3.2) \simeq 2.758341516$.

$\boxed{4}$ (1) $y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C$

$\Rightarrow y = Ae^{x^2}$. Comme $y(0) = 1$, on a : $1 = A$

D'où $y = e^{x^2}$ et pour suite $y(1) = e^1 = 2.71828$

L'erreur faite à la partie (1) de la question précédente est alors

$E = |2.71828 - 2.050583| \simeq 0.66769\ldots$

(2) $y' = 4y - y^2$, $y(0) = 1$

$\frac{dy}{dx} = 4y - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{4y - y^2} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y(4-y)} = x + C$

Pour $\int \frac{dy}{y(4-y)}$, on procède par fractions partielles :

(9)

$$\frac{1}{y(4-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{4-y} = \frac{4A + (B-A)y}{y(4-y)}$$

$$\Rightarrow 4A + (B-A)y = 1 \Rightarrow A = B = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{y(4-y)} = \frac{1/4}{y} + \frac{1/4}{4-y} \Rightarrow \int \frac{1}{y(4-y)}\,dy = \frac{1}{4}\left[\ln|y| - \ln|4-y|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{4-y}\right|$$

D'où $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{4-y}\right| = x + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{4-y}\right| = 4x + A \Rightarrow \frac{y}{4-y} = Be^{4x}$

$\Rightarrow y = 4Be^{4x} - yBe^{4x} \Rightarrow y = \frac{4Be^{4x}}{1+Be^{4x}}$. Comme $y(0) = 1$;

$$1 = \frac{4B}{1+B} \Rightarrow 4B = 1 + B \Rightarrow B = 1/3$$

$y = \frac{4/3\, e^{4x}}{1 + \frac{1}{3}e^{4x}} = \frac{4e^{4x}}{3+e^{4x}}$ et alors $y(2) = \frac{4e^8}{3+e^8} \simeq 4$

et l'erreur faite avec l'estimation à la question précédente est dans l'ordre de $E = |4 - 4.040847| \simeq 0.044$

(3) $y' = \frac{x}{y^2}$, $y(0) = 2 \Rightarrow y^2 dy = x\,dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int x\,dx \Rightarrow$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + A}$. Comme $y(0) = 2$, on a

$2 = \sqrt[3]{A} \Rightarrow A = 8$ et $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 8}$. Par conséquence,

$$y(3.2) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}(3.2)^2 + 8} = 2.8586278$$

L'erreur faite à l'estimation de $y(3.2)$ dans l'exercice précédent est alors $E = |2.8586278 - 2.758341561| \simeq 0.100286$

$\boxed{5}$ (1) Selon la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = k(T-22) \quad , \quad k < 0$$

(2) $\frac{dT}{T-22} = k\,dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|T-22| = kt + C \Rightarrow$

$T - 22 = Ae^{kt}$ et $T = Ae^{kt} + 22$.

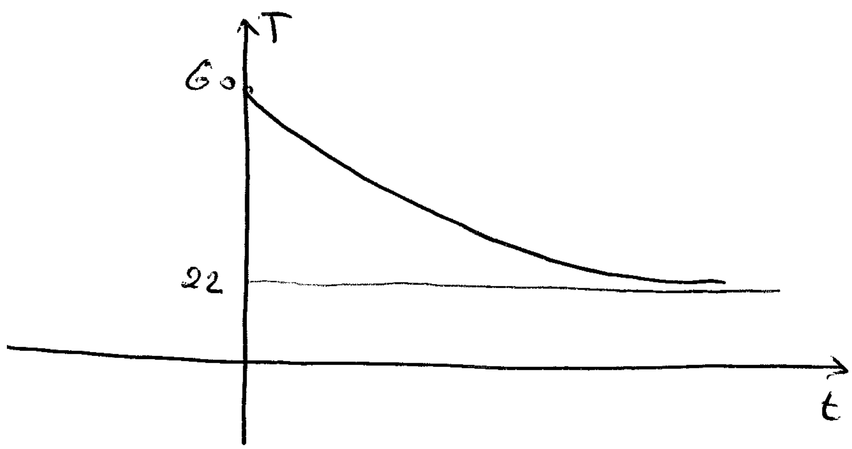
D'autre part, $t = 0$, $T = 60 \Rightarrow 60 = A + 22 \Rightarrow A = 38$

$T = 38e^{kt} + 22$.

$t = 5$, $T = 57 \Rightarrow 57 = 38e^{5k} + 22 \Rightarrow e^{5k} = \frac{35}{38} \Rightarrow k = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{35}{38}\right)$

$\simeq -0.0164 \Rightarrow T = 38e^{-0.0164t} + 22$

(3) Remarque que $T = 38e^{-0.0164t} + 22$ est une exponentielle décroissante et que $\lim_{t \to +\infty} T = 22$. De plus $T(0) = 60$:



$\boxed{6}$ Soit $T(t)$ la température du Mochini au temps t (en minutes).
Pour trouver le temps du meurtre, il faut trouver le moment t où la température du Mochini était $40\,°F$. Supposons que $t=0$ correspond à 10:07 am.

Selon la loi de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(T-70) \Rightarrow \frac{dT}{T-70} = k\,dt \Rightarrow$

$\ln|T-70| = kt + C \Rightarrow T = Ae^{kt} + 70$.

$t=0, T=60 \Rightarrow 60 = A + 70 \Rightarrow A = -10, T = -10e^{kt} + 70$.

$t=2, T=61 \Rightarrow 61 = -10e^{2k} + 70 \Rightarrow e^{2k} = 0.9 \Rightarrow 2k = \ln(0.9)$

et $k \simeq -0.0526$, d'où $T = -10e^{-0.0526t} + 70$

On veut trouver t si $T = 40\,°F$:

$$40 = -10e^{-0.0526t} + 70 \Rightarrow e^{-0.0526t} = 3 \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{-0.0526}$$

$\simeq -20.85$ minutes. Donc, le policier est mort 20.85 minutes avant 10:07, c'est à dire vers 9:46 am

MAT 1722 - Problèmes suggérés -

Modélisation avec les équations différentielles

[1] Lorsque les gens fument, ils introduisent du monoxide du carbon dans l'aire. Dans une chambre de 60 m^3, de l'aire contenant 5 % du monoxide du carbon est introduit dans l'aire à un taux de 0.003 m^3/min. Le monoxide du carbon se mélange parfaitement avec l'aire de la chambre et le mélange quitte la chambre au même taux.

(a) Écrire une équation différentielle satisfaite par le volume $V(t)$ du monoxide du carbon dans la chambre.

(b) Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'initialement, il n'y avait pas du monoxide du carbon dans la chambre.

(c) Trouver le volume du monoxide du carbon dans la salle à long terme et tracer le graphe de ce volume en fonction du temps.

[2] Durant une réaction chimique simple, chaque molécule de deux réactants A et B forment une molécule d'un produit C :

$$A + B \longrightarrow C$$

La loi d'action de masse assure que le taux de formation des molécules de C est proportionnel, à chaque moment de la réaction, au produit de nombres de molécules de A et B présents.

(1) Écrire une équation différentielle satisfaite par le nombre de molécules $x(t)$ de C présents au moment t (en minutes) en supposant qu'initialement, on avait 150 molécules de A et 375 molécules de B et que 25 molécules de C sont formées après 20 minutes.

(2) Résoudre cette équation différentielle pour trouver le nombre de molécules de C formés à tout moment t.

[3] Une solution de glucose est introduit dans le sang par injection selon un débit constant r. Au fur et à mesure que le glucose pénètre, il est transformé en d'autres substances et il est éliminé de la circulation sanguine à un taux proportionnel à la quantité du glucose présente à ce moment.

(1) Écrire une É.D. satisfaite par la quantité Q du glucose au moment t (exprimé en jours)

(2) Résoudre cette É.D sachant que la quantité initiale du glucose dans le sang était de Q_0 g.

[4] Une citerne contient 10000 L d'eau pure. De la saumure qui contient 0.01 kg de sel par litre y est introduite à raison de 6 L/min. De la saumure contenant 0.05 kg/L de sel y est introduite à raison de 10 L/min. De la saumure contenant 0.07 kg de sel par litre est aussi introduite à raison de 4 L/min. Le mélange sort à raison de 20 L/min.

(1) Écrire une É.D. satisfaite par la concentration C(t) du sel dans la citerne au temps t.

(2) Résoudre cette É.D.

(3) Tracer le graphe de c(t). Quelle est $\lim_{t \to +\infty} C(t)$?

[5] Une culture de bactéries démarre avec 500 bactéries et grandit à une vitesse proportionnelle à son effectif à tout moment. Elle compte déjà 8000 bactéries après 3 heures.

(a) Donner une expression du nombre de bactéries après t heures.

(b) Calculer le nombre de bactéries après 4 heures.

(c) Combien de temps faut-il pour que l'effectif soit 30 000 ?

6 Une échantillon de Radon-222 (matière radioactive) est réduit à 58 % de sa masse initiale en 3 jours.

(a) Quelle est la demi-vie du Radon-222 ?

(b) Si on dispose de 50 g de Radon-222 initialement, tracer le graphe de la masse Q(t) qui reste après t jours.

(c) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 10 % de la masse initiale de Radon-222 ?

MAT 1722 - Solutions des problèmes suggérés

[1] $V(t)$ = volume du monoxide du carbone présent au temps t (exprimé en minutes).

a) $\frac{dV}{dt}$ = Taux entrant du monoxide de carbone - Taux sortant du monoxide de carbone

$$\frac{dV}{dt} = 0.05(0.003) - 0.003\,\frac{V}{60} = 0.00015 - 0.000005V \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dt} = -0.000005\,(V-3)$$

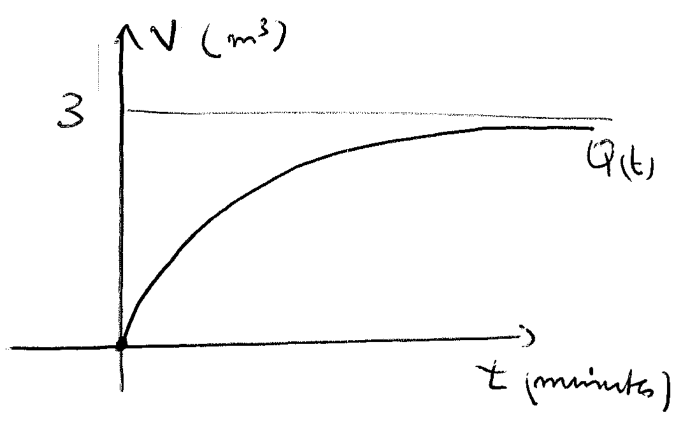
(b) $\frac{dV}{dt} = -0.000005(V-3) \Rightarrow \frac{dV}{V-3} = -0.000005\,dt \Rightarrow$

$$\int \frac{dV}{V-3} = \int -0.000005\,dt \Rightarrow \ln|V-3| = -0.000005t + C \Rightarrow$$

$V = Ae^{-0.000005t} + 3$. D'autre part, $t=0$, $V=0 \Rightarrow$

$0 = A+3 \Rightarrow A = -3 \Rightarrow V(t) = -3e^{-0.000005t} + 3$.

(c) $\lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty} (-3e^{-0.000005t} + 3) = 3\ m^3$.



[2] (1) $x(t) =$ # molécules de C présents au temps t.

Le taux de formation de C $\left(= \frac{dx}{dt}\right)$ est proportionnel au produit de nombres de molécules de A et B présent à ce moment :

$$\frac{dx}{dt} = k(150-x)(375-x)$$

(2) $\frac{dx}{dt} = k(150-x)(375-x) \Rightarrow \frac{dx}{(150-x)(375-x)} = k\,dt \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{(150-x)(375-x)} = kt + C.$$

$$\frac{1}{(150-x)(375-x)} = \frac{A}{150-x} + \frac{B}{375-x} \Rightarrow 375A + 150B - (A+B)x = 1 \Rightarrow$$

$$A+B=0,\ 375A+150B=1 \Rightarrow A = \frac{1}{225},\ B = -\frac{1}{225}$$

$$\frac{1}{(150-x)(375-x)} = \frac{\frac{1}{225}}{150-x} - \frac{\frac{1}{225}}{375-x} \Rightarrow \int \frac{1}{(150-x)(375-x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{225}\left[-\ln|150-x| + \ln|375-x|\right] = \frac{1}{225}\ln\left|\frac{375-x}{150-x}\right|. \quad \text{D'où}$$

$$\frac{1}{225}\ln\left|\frac{375-x}{150-x}\right| = kt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{375-x}{150-x}\right| = Dt + F \Rightarrow$$

$$\frac{375-x}{150-x} = Me^{Dt} \Rightarrow 375 - x = 150Me^{Dt} - Mxe^{Dt}$$

$$(1-Me^{Dt})x = 375 - 150Me^{Dt} \Rightarrow x = \frac{375-150Me^{Dt}}{1-Me^{Dt}}$$

$t=0,\ X=0 \Rightarrow 0 = \dfrac{375-150M}{1-M} \Rightarrow M = 2,5$

$$X = \frac{375-375e^{Dt}}{1-2.5e^{Dt}}$$

$t=20,\ X=25 \Rightarrow 25 = \dfrac{375-375e^{20D}}{1-2.5e^{20D}} \Rightarrow 1 = \dfrac{15-15e^{20D}}{1-2.5e^{20D}}$

$\Rightarrow 15-15e^{20D} = 1-2,5e^{20D} \Rightarrow 12.5e^{20D} = 14 \Rightarrow$

$$D = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{14}{12,5}\right) \simeq 0.005666$$

D'où $X(t) = \dfrac{375\left(1-e^{0,00566t}\right)}{1-2,5e^{0.005666t}}$

$\boxed{3}$ Soit $Q(t)$ = quantité du glucose dans le sang au temps t

(1) $\dfrac{dQ}{dt}$ = taux entrant du glucose − Taux sortant du glucose

$= r - kQ$ car le taux sortant est proportionnel

à la quantité Q présente.

$\dfrac{dQ}{dt} = r - kQ$, r, k deux constantes

(2) $\dfrac{dQ}{dt} = r - kQ = -k\left(Q - \frac{r}{k}\right) \Rightarrow \dfrac{dQ}{Q-\frac{r}{k}} = -k\,dt$

$\Rightarrow \ln\left|Q - \frac{r}{k}\right| = -kt + C \Rightarrow Q = Ae^{-kt} + \frac{r}{k}$

$t=0,\ Q=Q_0 \Rightarrow Q_0 = A + \frac{r}{k} \Rightarrow A = \left(Q_0 - \frac{r}{k}\right)$

$$Q = \left(Q_0 - \frac{r}{k}\right) e^{-kt} + \frac{r}{k}.$$

$\boxed{4}$ Soit $c(t)$ la concentration de sel dans la citerne au temps t. Alors $c(t) = \frac{Q(t)}{10000}$ où $Q(t)$ est la quantité du sel présente à ce moment. Alors $\frac{dc}{dt} = \frac{1}{10000}\frac{dQ}{dt} = 0,0001\,\frac{dQ}{dt}$. Mais

$\frac{dQ}{dt}$ = Taux entrant du sel − Taux sortant du sel

$$= \left[(0.01)\,6 + (0.05)(10) + 0.07(4)\right] - 20\,\frac{Q}{10000} = 0,84 - 0.002Q$$

$$\Rightarrow \frac{dc}{dt} = 0.0001\left[0,84 - 0,002\,Q\right] = 0.000084 - 0.002\,C$$

L'équation différentielle satisfaite par $c(t)$ est alors

$$\frac{dc}{dt} = 0,000084 - 0,002\,C = -0002\left(C - 0.042\right)$$

(2) $\frac{dc}{dt} = -0,002\,(C - 0.042) \Rightarrow \frac{dc}{C - 0,042} = -0,002\,dt \Rightarrow$

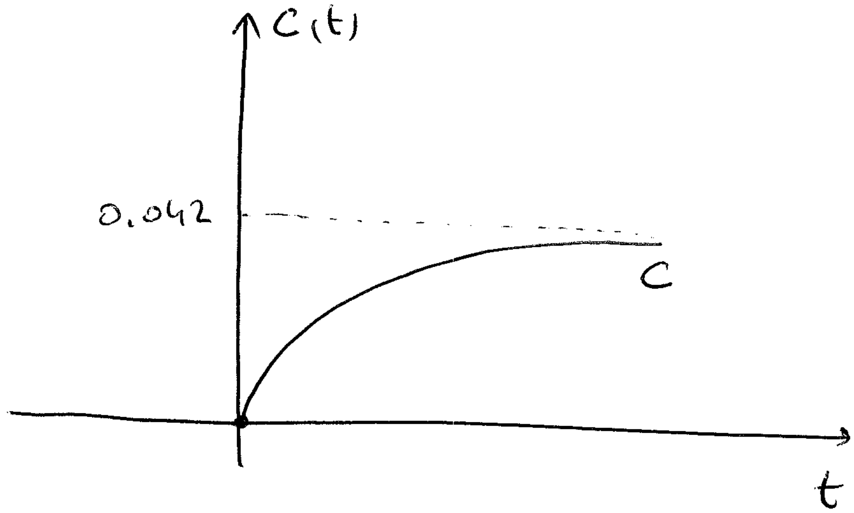
$$\int \frac{dc}{C - 0.042} = \int -0.002\,dt \Rightarrow \ln|C - 0.042| = -0,002\,t + A$$

$$\Rightarrow C(t) = Be^{-0,002t} + 0,042.$$

$t = 0$, $C = 0 \Rightarrow 0 = B + 0.042 \Rightarrow B = -0.042$

$$C(t) = -0.042\,e^{-0.002t} + 0.042.$$

(3) $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[-0{,}042\, e^{-0{,}002t} + 0{,}042 \right] = 0.042$



$\boxed{5}$ Soit $P(t)$ la population des bactéries après t heures :

(a) $\dfrac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \dfrac{dP}{P} = k\,dt \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|P| = kt + C$

$P = Ae^{kt}$ (modèle exponentiel)

$t = 0,\quad P = 500 \Rightarrow 500 = A$ et $P = 500e^{kt}$

$t = 3,\quad P = 8000 \Rightarrow 8000 = 500e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln(16) \simeq 0.92$

$P = 500e^{0.92t}$

(b) $t = 4,\quad P = 500e^{0{,}92(4)} \simeq 20159$

(c) $30000 = 500e^{0.92t} \Rightarrow t = \dfrac{1}{0.92}\ln(60) \simeq 4.45$ heures.

(6)

$\boxed{6}$ On sait que pour une matière radioactive, la quantité présente suit le modèle exponentielle

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

(a) $\frac{dQ}{dt} = kQ \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = k\,dt \Rightarrow \ln|Q| = kt + C \Rightarrow$

$Q = Ae^{kt} = Q_0 e^{kt}$ $(A = Q_0)$

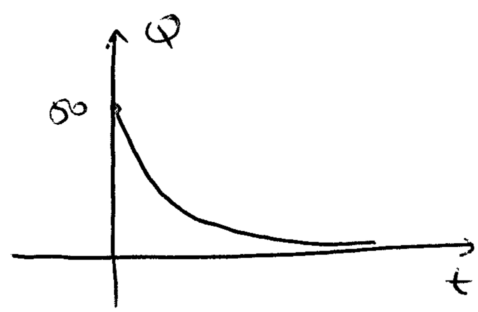
$t = 3$, $Q = 0.58Q_0 \Rightarrow 0.58Q_0 = Q_0 e^{3k} \Rightarrow e^{3k} = 0,58$

$\Rightarrow k = \frac{1}{3}\ln(0.58) = -0,1815$

$Q = Q_0 e^{-0.1815t}$. Pour trouver la demi-vie, on cherche le temps t où $Q = \frac{1}{2}Q_0$: $\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-0,1815t} \Rightarrow t = \frac{\ln(1/2)}{-0,1815}$

$\simeq 3.8$ jours.

(b) $Q = 50\,e^{-0.1815t}$



(c) $Q = 0,1\,Q_0 \Rightarrow$

$0,1\,Q_0 = Q_0 e^{-0,1815t}$

$\Rightarrow t = \frac{1}{-0.1815}\ln(0.1) \simeq 12,7$ jours.

MAT 1722 - Problèmes suggérés -

Développement des Fonctions en séries entières

[1] Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n x^{n-1}$ sachant que celui de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est 10. Pourquoi ?

[2] Développez chacune des fonctions suivantes en série entière et déterminer l'intervalle de convergence.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (2) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ (3) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+16}$ (5) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ (6) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ (8) $f(x) = \ln(1+x)$ (9) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$

(10) $f(x) = x \ln(1+x)$ (11) $f(x) = \ln(5-x)$ (12) $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

(13) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+25}$ (14) $f(x) = \text{Arctan}(2x)$

[3] Écrivez chacune des primitives sous la forme d'une série entière

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}\, dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\text{Arctan}\, x}{x}\, dx$

(4) $\displaystyle\int \text{Arctan}(x^2)\, dx$

[4] (a) À partir de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$; $|x| < 1$

(b) Calculer la somme de chacune des séries : $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$

(c) " " " " " " "

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^n$, $|x| < 1$; $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-n}{2^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

MAT 1722 - Solutions des problèmes suggérés -

1 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\,C_{n+1}}{n\,C_n}\,\frac{X^n}{X^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right||X|$

$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right||X|$. Remarquer que pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\,\frac{X^{n+1}}{X^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right||X|$.

Donc les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} nC_nX^{n-1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} C_nX^n$ ont la même rayon de convergence 10.

2 (1) $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $-1<x<1$

(série géométrique)

(2) $f(x) = \frac{x}{1-x} = x\left(\frac{1}{1-x}\right) = x\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$, $-1<x<1$

(3) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1-(-4x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n$; $|-4x^2|<1$.

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}$, $|x|^2<\frac{1}{4} \Leftrightarrow |x|<1/2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}<x<1/2$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^4+16} = \frac{1}{16\left(\frac{x^4}{16}+1\right)} = \frac{1}{16}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x^4}{16}\right)}$

$= \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^4}{16}\right)^n = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{16^{n+1}}$;

$\left|-\frac{x^4}{16}\right|<1 \Leftrightarrow |x|^4<16 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

(5) $f(x) = \dfrac{x}{x-3} = x\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = x\,\dfrac{1}{-3(1-(x/3))} = \dfrac{x}{-3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

$= -\dfrac{1}{3}x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$; $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1 \Leftrightarrow -3<x<3$

(6) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n}+x^{2n+2})$, $|x^2|<1 \Leftrightarrow$

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

(7) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} = -\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'$. D'où $f(x) = -\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'$

$= -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\, x^{n-1}$, $-1<x<1$.

Comme on a utilisé une dérivée, vérifions les points extrémités :

$\underline{x=-1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n(-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} n = \sum_{n=1}^{\infty} n$: divergente par le test de divergence

$\underline{x=1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$: divergente par le test de divergence.

(8) $f(x) = \ln(1+x)$. On sait que

$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $-1<x<1$, alors

$\ln(1+x) = \displaystyle\int\frac{1}{1+x}\,dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^n\,dx =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{Au point } x=0:$$

$$\ln(1+x) = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0 \Rightarrow C = 0 \text{ et}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1<x<1.$$

Vérifions les points extrémités:

$\underline{x=-1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0} \frac{-1}{n+1}$: diverge

$\underline{x=1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$: Converge par le test des séries alternées.

Donc, l'intervalle de convergence est $]-1,1]$.

(9) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Remarquer que $\left[\dfrac{1}{(1+x)^2}\right]' = \left[(1+x)^{-2}\right]' = -2(1+x)^{-3} = -\dfrac{2}{(1+x)^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^{n-1}\right)' \text{ (d'après}$$

$$\text{l'exercice \#9)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} n(n-1)\, x^{n-2}, \quad -1<x<1$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}\, n(n-1)}{2} x^{n-2}, \quad -1<x<1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} x^n, \quad -1<x<1$$

(10) $f(x) = x\ln(1+x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $-1 < x \leq 1$ (d'après l'exercice # 8) $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1}$, $-1 < x \leq 1$

(11). $f(x) = \ln(5-x) = \ln 5\left(1 - \frac{x}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1 - \frac{x}{5}\right)$

$$= \ln 5 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{5}\right)\right)$$

D'après l'exercice 8, $\ln\left[1 + \left(-\frac{x}{5}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{x}{5}\right)^{n+1}$,

$-1 < -\frac{x}{5} \leq 1 \iff -5 \leq x < 5$. D'où

$$\ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n},$$

$-5 \leq x < 5$. Par conséquent:

$$\ln(5-x) = \ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, \quad -5 \leq x < 5.$$

(12) $f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$. Remarquons que $\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \left[(1-2x)^{-1}\right]'$

$$= -(1-2x)^{-2}(-2) = 2(1-2x)^{-2} = \frac{2}{(1-2x)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n\right]', \quad -1 < 2x < 1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n 2^n x^{n-1}, \quad -\frac{1}{2} < x < 1/2 .$$

Par conséquent: $f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} = x^2 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n 2^n x^{n-1} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n-1)} n\, x^{n-1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

(13) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+25} = \dfrac{1}{25}\,\dfrac{1}{1+(x/5)^2} = \dfrac{1}{25}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{25}\right)^n;$

$\left|\dfrac{x^2}{25}\right| < 1 \quad = \dfrac{1}{25}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{25^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{5^{2n+2}},$

$|x| < 5$. D'où $\dfrac{1}{x^2+25} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{2n+2}}x^{2n}; \ -5 < x < 5.$

(14) $f(x) = \operatorname{Arctg}(2x) = 2\displaystyle\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx$

$= 2\displaystyle\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left((2x)^2\right)^n\right]dx = 2\int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}\,dx$

$= 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n 4^n x^{2n}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1} + C$

$x = 0$, $\operatorname{Arctg}(2x) = 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1} = 0$, d'où $C = 0$.

$\operatorname{Arctg}(2x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}, \quad |4x^2| < 1 \iff$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Vérifions les points extrémités :

<u>$x = -\frac{1}{2}$</u> $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{3n+1}\frac{1}{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$! Série convergente par le Test des séries alternées.

$\underline{x = 1/2}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$: Convergente par le test des séries alternées.

D'où $$\text{Arctg}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2.$$

$\boxed{3}$ (1) $$\int \frac{1}{1+x^4} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^4)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{4n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + C \; ; \; |-x^4| < 1 \iff -1 < x < 1.$$

$\underline{x = -1}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}$$, Converge : test des séries alternées

$\underline{x = 1}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$: " " " "

D'où $$\int \frac{1}{1+x^4} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(2) $$\int \frac{x}{1+x^5} dx = \int x \frac{1}{(1+x^5)} dx = \int x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^5)^n dx =$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{5n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (-1)^n x^{5n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{5n+2}}{5n+2} + C$$

$|x^5| < 1 \iff -1 < x < 1$

$\underline{x=-1}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{5n+2}}{5n+2} + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{6n+2}}{5n+2} + C$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5n+2} + C$: diverge en comparant avec $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{5n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{5n+2} = \frac{1}{5} < +\infty.$$

$\underline{x=1}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2}$: Converge par le test des séries alternées :

(i) $b_{n+1} = \dfrac{1}{5n+7} < b_n = \dfrac{1}{5n+2}$ $\qquad$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+2} = 0$

Donc $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{5n+2}}{5n+2} + C$; $-1 < x \leq 1$.

(3) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\,dx$. On sait que $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle\int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx$; $|-x^2| < 1$ $= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$; $|-x^2| = 1$

$\underline{x=-1}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$; Converge par le test des séries alternées :

(i) $b_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3} < b_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et (ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

$\underline{x=1}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: Converge par le test des séries alternées.

D'autre part $\operatorname{arctg}(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. D'où

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \; -1 \leq x \leq 1.$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}\,dx$$ (8)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} + C\ ;\ -1 \le x \le 1$$

(4) $\int \operatorname{Arctg}(x^2)\,dx$. On sait que $\operatorname{Arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

$-1 \le x \le 1$ (Voir exercice #21). D'où

$$\operatorname{Arctg}(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}\ ;\ -1 \le x \le 1.$$

$$\int \operatorname{Arctg}(x^2)\,dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)(4n+3)} + C\ ;\ -1 \le x \le 1$$

$\boxed{4}$ (a) On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$; $|x|<1$.

Prenons la dérivée de 2 côtés: $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$; $|x|<1$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$; $|x|<1$ $= x \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{1}{(1-x)^2}$ par la

partie (a). Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; $|x|<1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1/2)^n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$; $|x|<1$. Par la partie (a) on a :

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Prenons la dérivée de 2 côtés:

$$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \;;\; |x|<1 \;.\text{ D'où}$$

$$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n} = x^2 \sum_{n\geq 2}^{+\infty} n(n-1)\,x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \;;\; |x|<1 .$$

- $$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2-n}{2^n} = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2\,(1/2)^2}{(1-1/2)^3} = \frac{1/2}{1/8} = 4.$$

- $$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2-n}{2^n} = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2-n}{2^n} + \sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \underbrace{\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \frac{n^2-n}{2^n}}_{4} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}}_{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 4 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

MAT 1722-Problèmes suggérés sur les intégrales impropres

1. Étudier la convergence de chaque intégrale impropre. Calculer celles qui sont convergentes.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ (2) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^2} dx$ (3) $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^2+25} dz$

(5) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$ (6) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$ (7) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x} dx$ (8) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(9) $\int_0^4 \frac{1}{u^2-1} du$ (10) $\int_1^{+\infty} \frac{y}{y^4+1} dy$ (11) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ (12) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

(13) $\int_{16}^{20} \frac{1}{y^2-16} dy$ (14) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$ (15) $\int_0^{\pi} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (16) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

(17) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (18) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-5}} dy$ (19) $\int_{\pi}^{+\infty} \sin y$

2. Trouver l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$.

3. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, trouver la valeur exacte de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-a)^2}{b}}$ où a, b sont des constantes non nuls.

4. Pour quelles valeurs de p, l'intégrale suivante converge-t-elle?

$$\int_e^{+\infty} x^p \ln x dx.$$

Quelle est la valeur de l'intégrale lorsqu'elle converge?

5. Pour quelles valeurs de p, l'intégrale suivante converge-t-elle?

$$\int_0^e x^p \ln x dx.$$

Quelle est la valeur de l'intégrale lorsqu'elle converge?

MAT 1722 – Solutions des Problèmes suggérés – Intégrales impropres liste #1

[I]

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x}\,dx$; Par parties :

$u = x, \quad v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1, \quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$

$\Rightarrow \int_0^t xe^{-x}dx = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^t = -e^{-t}(t+1) + 1 = 1 - \frac{t+1}{e^t}$

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{t+1}{e^t}\right) = 1 - \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 1 < +\infty$

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$ Converge vers 1.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x}{4+x^2}dx$

$u = 4+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{x}{4+x^2}dx = \int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(4+x^2)$

$\int_1^t \frac{x}{4+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\right]_1^t = \frac{1}{2}\ln(4+t^2) - \frac{1}{2}\ln(5)$

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^2}dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(4+t^2) - \frac{1}{2}\ln(5)\right] = +\infty$

L'intégrale diverge.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (2)

$u = 1+e^x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{e^x}$

$\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{u}\,\frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(1+e^x) + C$

$\displaystyle\int_{t}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_t^0 = \ln 2 - \ln(1+e^t)$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \left[\ln 2 - \ln(1+e^t)\right] = \ln 2 < +\infty$

d'intégrale converge et sa valeur est $\ln 2$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+25} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{z^2+25} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+25}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{z^2+25} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dz}{z^2+25} = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{5}\operatorname{Arctan}\left(\frac{z}{5}\right)\right]_t^0$

$\displaystyle = \lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{5}\operatorname{Arctan}(0) - \frac{1}{5}\operatorname{Arctan}(t/5)\right] = \frac{\pi}{10} < +\infty$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+25} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{5}\operatorname{Arctan}\left(\frac{z}{5}\right)\right]_0^t =$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{5}\operatorname{Arctan}(t/5) - \frac{1}{5}\operatorname{Arctan} 0\right] = \frac{\pi}{10} < +\infty$

Comme les 2 intégrales convergent, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+25}$ converge aussi et sa valeur est $2\frac{\pi}{10} = \pi/5$.

(5) $$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{t\to 4^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{t\to 4^-} \left[\frac{1}{4} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 4^-} \left[\frac{1}{4}\operatorname{Arcsin}(t/4) - \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin}(0)\right] = \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{8} < +\infty.$$

L'intégrale converge alors vers $\pi/8$

(6) $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \lim_{t\to \pi/2^-} \int_{\pi/4}^{t} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$z = \cos x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{z}} \frac{dz}{-\sin x} = -\int z^{-1/2}\, dz = -2\sqrt{\cos x}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \lim_{t\to \pi/2^-} \left[-2\sqrt{\cos x}\right]_{\pi/4}^{t} = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \left(-2\sqrt{\cos t} + 2\sqrt{1/\sqrt{2}}\right)$$

$= 2\sqrt{1/\sqrt{2}} < +\infty$. Alors $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$ converge et sa valeur est $2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{3/4}$.

(7) $$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{x^4+1}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) dx$$

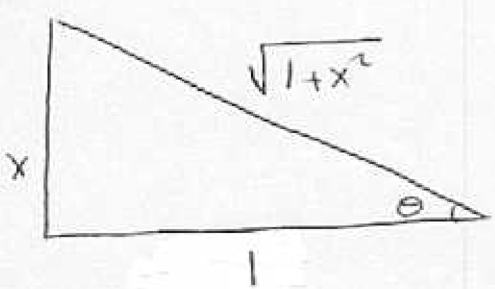
$$= \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{x^4}{4} + \ln|x| \right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{1}{4} - \frac{t^4}{4} - \ln|t| \right] = +\infty.$$

L'intégrale diverge

(8) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Posons $x = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, alors $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln\left|\sqrt{1+x^2} + x\right|$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\ln\left|\sqrt{1+t^2} + t\right| - \ln(\sqrt{2}+1) \right] = +\infty$$

L'intégrale diverge

(9) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{u^2-16}\,du = \lim_{t \to 4^-} \int_0^t \frac{1}{u^2-16}\,du$, on utilise la méthode des fractions partielles:

$$\frac{1}{u^2-16} = \frac{1}{(u-4)(u+4)} = \frac{A}{u-4} + \frac{B}{u+4} = \frac{(A+B)u + 4(A-B)}{(u-4)(u+4)}$$

$\Rightarrow A+B=0$ et $4(A-B)=1 \Rightarrow A = 1/8$ et $B = -1/8$

$$\frac{1}{u^2-16} = \frac{1/8}{u-4} - \frac{1/8}{u+4} \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{u^2-16}\,du = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-4}{u+4}\right| + C$$

$$\int_0^4 \frac{1}{u^2-16}\,du = \lim_{t\to 4^-} \left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-4}{u+4}\right|\right]_0^t = \lim_{t\to 4^-} \left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|\right) = -\infty$$

Donc l'intégrale diverge

(10) $$\int_1^{+\infty} \frac{y}{y^4+1}\,dy = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{y}{y^4+1}\,dy$$. Posons $z = y^2 \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dy} = 2y \Rightarrow dy = \frac{dz}{2y} \Rightarrow \int \frac{y}{y^4+1}\,dy = \int \frac{y}{z^2+1}\,\frac{dz}{2y} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(y^2)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{y}{y^4+1}\,dy = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(y^2)\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(t^2) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\pi/2) - \frac{1}{2}(\pi/4) = \pi/8 < +\infty$$

L'intégrale converge et sa valeur est $\pi/8$

(11) $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{dx}{x\ln x}$$. Posons $u = \ln x \Rightarrow$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{xu}\,x\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|\ln x|$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln|\ln t| - \ln|\ln 2|\right)$$

$$= +\infty$$

L'intégrale diverge

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$ et $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{u}{x}\,x\,du$

$$= \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -\frac{(\ln t)^2}{2} = -\infty$; l'intégrale diverge

(13) $\displaystyle\int_{16}^{20} \frac{1}{y^2-16}\,dy = \int_{16}^{20} \frac{1}{(y-4)(y+4)}\,dy$

Remarquer que la fonction $f(y) = \dfrac{1}{y^2-16}$ est continue en tout point sauf $y = \pm 4$ qui sont tous les deux hors de l'intervalle $[16, 20]$

L'intégrale est par suite convergente. Calculons sa valeur :

$$\frac{1}{y^2-16} = \frac{1}{(y-4)(y+4)} = \frac{A}{y-4} + \frac{B}{y+4} = \frac{(A+B)y+4(A-B)}{y^2-16} \iff$$

$$(A+B)y + 4(A-B) = 1 \iff A+B=0 \text{ et } A-B = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{8} \text{ et}$$

$B = -\frac{1}{8}$. D'où

$$\frac{1}{y^2-16} = \frac{1/8}{y-4} - \frac{1/8}{y+4} \Rightarrow \int \frac{1}{y^2-16}\,dy = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{y-4}{y+4}\right| \text{ et alors}$$

$$\int_{16}^{20} \frac{1}{y^2-16}\,dy = \left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{y-4}{y+4}\right|\right]_{16}^{20} = \frac{1}{8}\ln\frac{16}{24} - \frac{1}{8}\ln\frac{12}{20} =$$

$$\frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right] = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{10}{9}\right)$$

(14) $$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du \Rightarrow \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{x\,du}{xu} = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| = \ln|\ln x| \text{ , d'où } \int_t^2 \frac{dx}{x\ln x} = \Big[\ln|\ln x|\Big]_t^2 = \ln|\ln 2| - \ln|\ln t|$$

et $$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to 1^+}\left[\ln|\ln 2| - \ln|\ln t|\right] = +\infty$$, l'intégrale diverge

(15) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$u = -\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = -2\sqrt{x}\,du \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{u} (-2\sqrt{x}) du = -2\int e^{u} du = -2e^{u} =$$

$-2e^{-\sqrt{x}}$, d'où $\displaystyle\int_t^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_t^{\pi} = -2e^{-\sqrt{\pi}} + 2e^{-\sqrt{t}}$

et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{t\to 0^+} \left(-2e^{-\sqrt{\pi}} + 2e^{-\sqrt{t}}\right) = -2e^{-\sqrt{\pi}} + 2.$

(16) $$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_3^{t} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$u = \ln x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$ et

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int \frac{x\,du}{x\,u^2} = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$\int_3^{t} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_3^{t} = -\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 3} \Rightarrow$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3} < +\infty$$, l'intégrale

converge et sa valeur est $\dfrac{1}{\ln 3}$

(17) $$\int_0^{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{t\to 2^-} \int_0^{t} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$u = 4 - x^2 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-2x}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = -\frac{1}{2} \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$$

$-\sqrt{u} = -\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^t =$

$-\sqrt{4-t^2}+2$ et $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\left(-\sqrt{4-t^2}+2\right) = 2 < +\infty$

L'intégrale converge et sa valeur est 2.

(18) $\int_7^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y-5}} = \lim_{t\to+\infty}\int_7^t \frac{dy}{\sqrt{y-5}} = \lim_{t\to+\infty}\left[2\sqrt{y-5}\right]_7^t$

$= \lim_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t-5}-2\sqrt{2}\right) = +\infty$, l'intégrale diverge.

(19) $\int_\pi^{+\infty} \sin y\,dy = \lim_{t\to+\infty}\int_\pi^t \sin y\,dy = \lim_{t\to+\infty}\left[-\cos y\right]_\pi^t =$

$\lim_{t\to+\infty}\left(-\cos t+\cos\pi\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\cos t-1\right)$: cette limite n'existe pas, alors $\int_\pi^{+\infty}\sin y\,dy$ diverge

$\boxed{2}$ l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = xe^{-x}$, $x \geq 0$ est $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x}\,dx$.

Pour l'intégrale $\int xe^{-x}\,dx$, on procède par parties :

$u = x$, $v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1$, $v = -e^{-x}$

$\int xe^{-x}\,dx = xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx = xe^{-x} - e^{-x}$

$$\int_0^t xe^{-x}dx = \left[xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t = te^{-t} - e^{-t} - (0 - 1)$$

$$= \frac{t-1}{e^t} + 1$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t-1}{e^t} + 1\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^t} + 1\right)$$ (Règle de d'Hopitâl) $= 1$. Donc l'aire sous la courbe de $f(x) = xe^{-x}$ est égale à 1.

$\boxed{3}$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a}{\sqrt{b}}\right)^2} dx$$

$$t = \frac{x-a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{b}} \Rightarrow dx = \sqrt{b}\, dt$$

Remarquer aussi que $t \to \pm\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{b}\, dt = \sqrt{b}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{b\pi}.$$

$\boxed{4}$ $$\int_e^{+\infty} x^p \ln x \, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_e^t x^p \ln x \, dx$$

Procédons par parties pour l'intégrale $\int x^p \ln x \, dx$:

$u = \ln x$, $v' = x^p \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ si $p \neq -1$

$$\int x^p \ln x \, dx = \frac{x^{(p+1)} \ln x}{(p+1)} - \int \frac{x^p}{p+1} dx = \frac{x^{(p+1)} \ln x}{(p+1)} - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1}$$

(si $p \neq -1$). D'où $\int_e^t x^p \ln x \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \ln x - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1} \right]_e^t$

$$= \frac{t^{p+1} \ln t}{p+1} - \frac{t^{p+1}}{(p+1)^2} - \frac{e^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} e^{p+1}.$$

$$\int_e^{+\infty} x^p \ln x \, dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t^{(p+1)}}{p+1} \ln t - \frac{t^{(p+1)}}{(p+1)^2} - \frac{e^{(p+1)}}{p+1} + \frac{e^{(p+1)}}{(p+1)^2} \right]. \quad (*)$$

Envisageons les cas suivants :

<u>Cas 1</u> <u>$p > -1$</u> Dans ce cas $p+1 > 0$ et la limite de la ligne $(*)$ est $+\infty$. L'intégrale diverge.

<u>Cas 2</u> <u>$p < -1$</u> Dans ce cas $p+1 < 0$ et la limite de la ligne $(*)$ est égale à $-\frac{e^{(p+1)}}{(p+1)} + \frac{e^{(p+1)}}{(p+1)^2} < +\infty$. L'intégrale converge dans ce cas.

<u>Cas 3</u> <u>$p = -1$</u> $\int_e^{+\infty} x^p \ln x \, dx = \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_e^t \frac{\ln x}{x} dx$

$= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^t = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{(\ln t)^2}{2} - \frac{1}{2} \right] = +\infty$. L'intégrale diverge dans ce cas. Alors

$$\int_e^{+\infty} x^p \ln x \, dx \begin{cases} \text{Converge vers } -\dfrac{e^{(p+1)}}{p+1} + \dfrac{e^{(p+1)}}{(p+1)^2} & \text{si } p < -1 \\ \\ \text{diverge} & \text{si } p \geq -1 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ $\int_0^e x^p \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^e x^p \ln x \, dx$. Comme on a fait à l'exercice précédent, $\int x^p \ln x \, dx = \dfrac{x^{(p+1)}}{p+1} \ln x - \dfrac{1}{(p+1)^2} x^{(p+1)}$ si $p \neq -1$.

$$\int_0^e x^p \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \ln x - \frac{1}{(p+1)^2} x^{(p+1)} \right]_t^e =$$

$$\lim_{t \to 0^+} \left[\frac{e^{(p+1)}}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} e^{(p+1)} - \frac{t^{p+1}}{p+1} \ln t + \frac{1}{(p+1)^2} t^{(p+1)} \right] (*)$$

Envisageons les cas suivants :

<u>Cas 1</u> <u>$p > -1$</u> Dans ce cas $p+1 > 0$, la limite de la ligne $(*)$ est égale à $\dfrac{e^{p+1}}{p+1} - \dfrac{1}{(p+1)^2} e^{(p+1)}$. L'intégrale converge vers cette valeur.

<u>Cas 2</u> <u>$p < -1$</u> Dans ce cas $p+1 < 0$, la limite de la ligne $(*)$ est ∞, l'intégrale diverge.

<u>Cas 3</u> <u>$p = -1$</u> $\int_0^e x^p \ln x \, dx = \int_0^e \dfrac{\ln x}{x} dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^e \dfrac{\ln x}{x} dx =$

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_t^e = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln t)^2\right] = +\infty,$$

l'intégrale diverge. Alors

$$\int_0^e x^p \ln x \, dx \begin{cases} \text{converge à } \dfrac{e^{p+1}}{p+1} - \dfrac{1}{(p+1)^2} e^{(p+1)} & \text{si } p > -1 \\ \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq -1 \end{cases}$$