Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702A: Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdelkrim El basraoui

Examen de pratique I
le 26 janvier 2016

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant ______________________

Instructions :

(1) Écrivez votre nom et numéro d'étudiant à la premiére page.
(2) L'examen est d'une durée de 80 minutes.
(3) Cet examen est un examen à livres fermés. Les notes de cours, calculatrices et papier brouillon ne sont pas permis.
(4) Il y a environ **7 questions longues**.
(5) Vous devez justifier toutes vos réponses.
(6) **Ne pas détacher ce livret**.
(7) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme feuille de brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction si aucune indication n'est faite.
(8) Vous avez une page supplémentaire à la fin pour que vous pouvez utiliser comme brouillon.
(9) Bonne chance !!!

1. Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 \ + 2x_2 = x_3 - 5x_4 + 1 \\ \quad -2x_2 = 4x_4 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 6x_4 + 4 \end{cases}$$

Écrivez ce système linéaire sous forme d'une équation vectorielle, puis déterminez s'elle est compatible ou incompatible. Vous devez spécifier vos étapes et justifier votre réponse.

Solution: Tout d'abord ce système linéaire est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 \ + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \\ \quad -2x_2 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

La M.A. associé est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right]$. De la on peut lire les vecteurs (colonnes) de l'équation vectorielle associée

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Maintenant pour résoudre cette équation vectorielle on réduit la matrice augmentée de ce système comme suit

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_3]{L_1 \to L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

Donc, puisque la colonne des constantes est une colonne pivot, le système est incompatible.

2. Considérez la matrice augmentée suivante d'un système linéaire.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

i. Déterminez les colonnes pivots de cette matrice.

ii. Déterminez si ce système est compatible ou incompatible. s'il est compatible trouvez sa solution générale.

Solution: Pour cette question on besoin seulement de la matrice échelonnée.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

i. Donc les colonnes pivots sont la premiére, seconde, troisième et cinquième.

ii. Comme la colonne des coéfficients est une colonne pivot (-1 en bas de la colonne) alors le systéme est incompatible. (On peut aussi argumenter de la façon suivante: comme le nombre de pivots dans la matrice augmentée est supérieur à celui de la matrice des coéfficients alors le système est incompatible). La vérification est donc comme suit: la dernière équation nous donne la contradiction $0 = -1$.

Voici une question semblable.

Trouvez la solution générale du système suivant tout en indicant les variables de base et ceux libres. Aussi vérifier votre réponse finale.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 + 3 &= x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_4 + 1 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \end{cases}$$

Solution: Premièrement, le système équivalent est

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & +4x_4 & = -3 \\ x_1 & & -\frac{1}{2}x_3 & +3x_4 & = -1 \\ x_1 & x_2 & & +2x_4 & = 1 \end{cases}$$

On doit après trouver la matrice échelonnée pour décider si le système est compatible ou incompatible. Si compatible on continue à échelonner jusqu'à obtenir la matrice échelonnée réduite. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le système équivalent à cette matrice est donc

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 2 \,. \end{cases}$$

Donc les variables x_1 et x_2 (correspondant aux colonnes pivots) sont les variables de *base* et les variables x_3 et x_4 sont donc les variables *libres*.

On exprime donc les variables de base en fonction des variables libre pour obtenir

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{1}{2}x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \\ x_3 = \text{libre} \\ x_4 = \text{libre.} \end{cases}$$

Pour vérifier notre réponse il suffit de substituer **seulement** les expressions de x_1 et x_2 dans le système original. On a

$$\begin{cases} (-1 + \frac{1}{2}x_3 - 3x_4) + 4x_4 + 3 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_3 \\ (-1 + \frac{1}{2}x_3 - 3x_4) + 3x_4 + 1 = \frac{1}{2}x_3 \\ (-1 + \frac{1}{2}x_3 - 3x_4) + (2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4) + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Comme chaque substitution ne fournie pas de contradiction, notre solution est donc la bonne.

3. Trouvez les valeurs de h and k pour que le système linéare suivant est **incompatible**.

$$\begin{cases} \quad x_1 + 2x_2 \qquad = 1 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + hx_2 - x_3 = k \end{cases}$$

Solution: On doit échelonner et réduire la matrice augmentée de ce système

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & h & -1 & k \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & h+4 & -1 & k+2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - (h+4)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2h+7 & k+2 \end{array}\right]$$

Le système est donc incompatible si et seulement si la colonne des constantes est une colonne pivot. Ceci correspond à $h = -\dfrac{7}{2}$ and $k \neq -2$.

4. Déterminez les valeurs de h pour que $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ appartient à

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Autrement dit, cherchez les valeurs de h pour que $\overrightarrow{b}$ soit combinaison linéaire des vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puis pour $h = 0$ écrivez $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de ces derniers vecteurs.

Solution: On considère la matrice suivante qu'on doit échelonner

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & h & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & h-1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}h + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Donc le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ si et seulement si la matrice précédente est celle d'un système compatible. Ceci est équivalent à $\frac{1}{2}h + \frac{1}{2} \neq 0$, ou $h \neq -1$.

Pour $h = 0$ la dernière matrice devient $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$.

On doit donc trouver la solution du système associé et donc trouver les poids pour exprimer $\vec{b}$ comme combinaison linéaire des vecteurs donnés. On a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\begin{bmatrix} L_2 \to L_2 + L_3 \\ L_1 \to L_1 + L_3 \end{bmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

D'où la solution $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ qui sont aussi les poids. En conclusion, on a

$$\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vérifiez que cette combinaison donne $\vec{b}$.

5. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$ et soit le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ k \end{bmatrix}$. Trouvez la relation entre g, h, k pour que $\vec{u}$ soit une combinaison linéaire des colonnes de A.

Solution: Il faut que le système dont la M.A. est $[A|\vec{u}]$ soit compatible. Donc on doit trouver la M.E. associée. On a alors

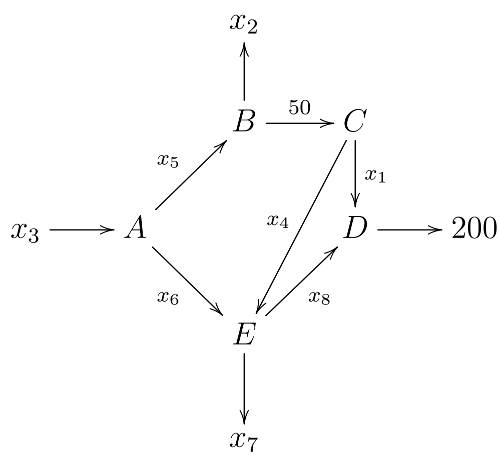
$$[A|\vec{u}] \xrightarrow{\begin{bmatrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + 3L_1 \end{bmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & g \\ 0 & 1 & 0 & h-2g \\ 0 & 1 & 0 & 3g+k \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & g \\ 0 & 1 & 0 & h-2g \\ 0 & 0 & 0 & 5g-h+k \end{array}\right].$$

De cette M.E. on peut lire que le système est compatible si et seulement si la dernière colonne n'est pas une colonne pivot et donc on doit avoir $g+h+k=0$, qui est la relation à trouver.

6. Donnez un exemple d'une matrice sous **forme échelonnée réduite** d'un système linéaire avec 3 équations et deux variables qui est

(i) compatible avec une solution unique;
(ii) compatible avec une solution unique;
(iii) incompatible.

7. Considérer le réseau routier décrit par le diagrame suivant. Les lettres A à E dénotent les intersections. Les flèches indiquent le sens du trafic routier. Le nombre de voitures par minute qui circulent sur réseau est aussi indiqué. La circulation se fait à sens unique.



(a) **[3 points]** Écrivez le systéme linéaire décrivant le trafic sur ce réseau routier. [**Ne pas résoudre** ce système.]

Solution:

$$\begin{array}{lrl} A & x_3 & = x_5 + x_6 \\ B & x_5 & = x_2 + 50 \\ C & 50 & = x_1 + x_4 \\ D & x_1 + x_8 & = 200 \\ E & x_4 + x_6 & = x_7 + x_8 \\ \text{Total} & x_3 & = x_2 + x_7 + 200 \end{array}$$

(b) [**1 point**] Supposons que la matrice échelonnée réduite du système représentant ce réseau est:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donnez la solution générale de ce système.

Solution: variables de base: x_1, x_2, x_3, x_4, x_6; variables libres: x_5, x_7, x_8.

$$\begin{cases} x_1 = -x_8 + 200 \\ x_2 = x_5 - 50 \\ x_3 = x_5 + x_7 + 150 \\ x_4 = x_8 - 150 \\ x_5 = \text{libre} \\ x_6 = x_7 + 150 \\ x_7 = \text{libre} \\ x_8 = \text{libre} \end{cases}$$

(c) [**1 point**] Supposons que, dû a des travaux, le trafic sur la route ED est limité à un maximum de 200 voitures par minute. Quel est le nombre maximal de voitures qui peut circuler sur la route CE?

Solution: Comme $x_4 = x_8 - 150$ et $x_8 \leq 200$ on a $x_4 \leq 200 - 150 = 50$, c-à-d le nombre maximal de voitures qui pourront circuler sur CE est 50 voitures par minutes.