



Calcul III pour ingénieurs  
MAT 2722A - Automne 2011  
Examen Final  
Professeur: Abdellah Sebbar  
Durée: 3 heures.

Nom: \_\_\_\_\_

Numéro d'étudiant: \_\_\_\_\_

**Instructions**

- Cet examen comprend 15 pages.
- Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas permises.
- Lisez attentivement chaque question avant de répondre.
- les questions 1 à 10 sont à choix multiples. Chacune vaut 2 points et aucun point partiel n'est possible. **SVP mettez vos réponses dans les cases des "réponses aux questions à choix multiples" en bas.**
- Les questions 11 à 16 sont à réponse longue et chacune vaut 5 points. **Une réponse complète exige une solution détaillée, complète et bien écrite.** Répondez à chaque question dans l'espace fourni en utilisant le verso des pages si nécessaire.
- Ne pas désaggraver l'examen.
- Bonne chance!

**Réponses aux questions à choix multiples:**

#1

#2

#3

#4

#5

#6

#7

#8

#9

#10

1. On considère la fonction  $f(x, y) = x^4y + 2xy^2$ . Dans la direction de quel vecteur obtient-on la valeur maximale de la dérivée de cette fonction au point  $(1, 2)$  ?

A.  $9\vec{i} + 16\vec{j}$

B. 25

C.  $16\vec{i} + 9\vec{j}$

D.  $\vec{i}$

E.  $\vec{j}$

F. la dérivée de cette fonction n'a pas de valeur maximale.

2. Laquelle des équations suivantes est celle du plan tangent à la surface  $z = 2x^2 - 4y^3$  au point  $(2, 1, 4)$ ?

A.  $z = 8x - 12y + 4$

B.  $z = 4x(x - 2) - 12y^2(y - 2) + 4$

C.  $z = 4$

D.  $z = 8x - 12y$

E.  $z = 8(x - 2) - 12(y - 1) + 4$

F. Cette fonction n'est pas différentiable en ce point et le plan tangent n'existe pas.

3. On considère la région solide bornée par les plans  $z = 0$ ,  $z = 10 - x - 2y$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  et  $y = 2$ . Trouver l'intégrale de  $f(x, y) = xy$  sur ce solide.

A.  $\frac{20}{3}$

B.  $\frac{19}{3}$

C. 1

D. 15

E. 6

F. 0

4. Laquelle des intégrales doubles suivantes correspond à l'inversion de l'ordre d'intégration

de  $\int_{x=-1}^0 \int_{y=x^2}^1 f(x, y) dy dx$ ?

A.  $\int_{x=-1}^0 \int_{y=x^2}^1 f(y, x) dx dy$

B.  $\int_{y=x^2}^1 \int_{x=-1}^0 f(x, y) dx dy$

C.  $\int_0^1 \int_{x=0}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$

D.  $\int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx dy$

E.  $\int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{y}}^0 f(y, x) dx dy$

F.  $\int_{x=0}^{-1} \int_{y=1}^{x^2} f(x, y) dy dx$

5. On considère la région solide (cône de crème glacée) bornée par l'hémisphère  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  et par le cône  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La valeur de l'intégrale triple de la fonction  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  est:

A.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\rho=0}^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

B.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\rho=0}^1 \rho^4 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

C.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\rho=0}^1 \rho^4 \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

D.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\rho=0}^1 \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

E.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^1 \rho^4 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

F.  $\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\rho=0}^1 \rho^3 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

6. On considère la courbe paramétrée  $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \sin 3t\vec{j} - \cos 3t\vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/3$ . La longueur totale de cette courbe est

A.  $\frac{2\pi}{3}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

D.  $\frac{-2\pi}{3}\vec{i}$

E.  $\pi$

F.  $\frac{\pi\sqrt{13}}{3}$

7. Laquelle des intégrales suivantes est le résultat du passage au coordonnées polaires dans

l'intégrale:  $\int_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{y=|x|}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y) dy dx$

A.  $\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) dr d\theta$

B.  $\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$

C.  $\int_{\theta=0}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$

D.  $\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$

E.  $\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_{r=0}^1 (r^2 \sin^2 \theta - r \cos \theta) r dr d\theta$

F.  $\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^1 (r^2 \cos^2 \theta - r \sin \theta) r dr d\theta$

8. Soit  $D$  une région du plan sur laquelle le théorème de Green est satisfait, et soit  $C$  la frontière de  $D$  orientée positivement par rapport à  $D$ . Laquelle des intégrales suivantes est égale à l'aire de  $D$ ? On rappelle que l'aire de  $D$  est donnée par  $\int \int_D dx dy$ .

A.  $\oint_C x dx + y dy$

B.  $\oint_C y dx + x dy$

C.  $\oint_C x dy$

D.  $\oint_C y dx$

E.  $\oint_C x^2 dx + y^2 dy$

F.  $\oint_C y^2 dx - x^2 dy$

9. Laquelle des valeurs suivantes correspond à la valeur de l'intégrale curviligne  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  du champs vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$  le long du segment de droite  $C$  qui commence au point  $(0, 0, 0)$  et finit au point  $(1, 1, 1)$ ?

- A.  $\frac{3}{2}$
- B.  $\frac{5}{2}$
- C.  $\frac{7}{2}$
- D.  $\frac{9}{2}$
- E.  $\frac{-3}{2}$
- F.  $\frac{-5}{2}$

10 Laquelle des valeurs suivantes correspond à l'intégrale de surface  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$  du champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$  sur le carré  $S$  défini par  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $z = 3$ , et orienté dans la direction du vecteur  $\vec{k}$ ?

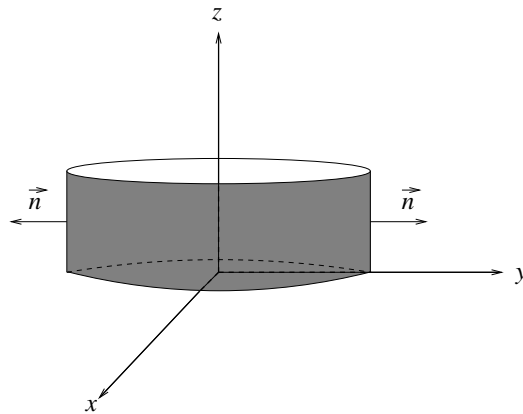
- A. -11
- B. -12
- C. -13
- D. -14
- E. -15
- F. -16

11. On considère le champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (z e^x \sin y) \vec{i} + (z e^x \cos y) \vec{j} + (e^x \sin y) \vec{k}$ . Montrer que ce champ vectoriel est conservatif, puis trouver une fonction  $f(x, y, z)$  telle que  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ . Finalement, calculer

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

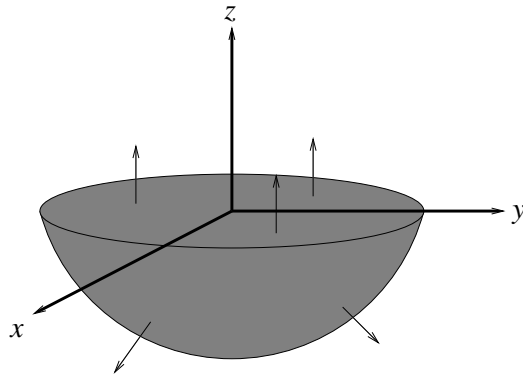
où  $C$  est une courbe continue qui commence au point  $(0, 0, 0)$  et finit au point  $\left(1, \frac{\pi}{2}, 2\right)$ .

12. On considère le champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (x - y)\vec{i} + (y + x)\vec{j} + \vec{k}$ . Soit  $S$  la bande cylindrique orientée  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , avec le vecteur normal  $\vec{n}$  se dirigeant vers l'extérieur comme dans le dessin. Calculer le flux  $\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ .

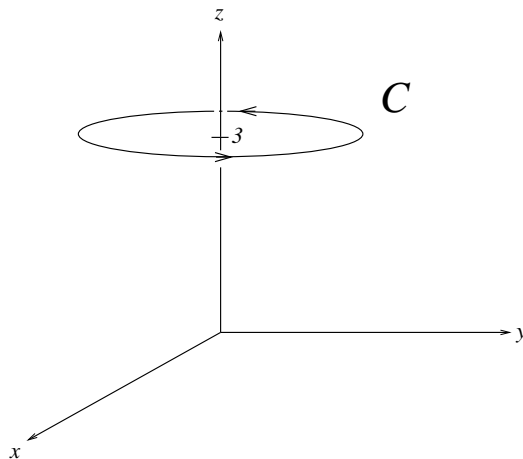


**13.** Trouver le maximum absolu et le minimum absolu de la fonction  $z = f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$  sur le disque de rayon 1, centrée à l'origine,  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ .

14. Pour le champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - y^2)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j} + (z^3 + x)\vec{k}$ , calculer la divergence de  $\vec{F}$ , i.e. calculer  $\nabla \cdot \vec{F}$ . Puis, **utiliser le théorème de divergence (Gauss)** pour calculer l'intégrale de surface (flux)  $\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , où  $S$  est la surface orientée ci-dessous et qui consiste en deux parties: l'hémisphère  $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , et le disque  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$  dans le plan  $z = 0$ .



15. Pour le champ vectoriel  $\vec{F}(x, y, z) = (-y + e^{\sin x})\vec{i} + (x - \ln(\cos^2(e^y)))\vec{j} + (z^3)\vec{k}$ , calculer le rotationnel de  $\vec{F}$ , i.e. calculer  $\nabla \times \vec{F}$ . Puis, **en utilisant le théorème de Stokes**, calculer l'intégrale curviligne  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , où  $C$  est la courbe orientée  $x^2 + y^2 = 1, z = 3$ , ci-dessous.



**16.** Trouver et classifier les points critiques de la fonction  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$ .

(Page Extra )

(Page Extra )

(Page Extra)