Solutions

MAT 2722 A
CALCUL III
Examen de Mi-session

12 novembre 2015

Professeur: Dr. A. Sebbar

Durée: 80 minutes

Nom de famille:________________________ Prénom:________________________

Numéro d'étudiant:__________________

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours (moins qu'il s'agisse dun examen à livre ouvert). Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur vous-mêmes. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées ce qui pourrait engendrer une attribution d'une note de 0 (zéro) pour cet examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez l'importance de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature: ________________________

Instructions:

- Écrivez votre nom et votre numéro d'étudiant sur cette page.
- Vérifiez que votre copie d'examen contient 8 pages.
- Questions 1 à 3 sont à choix multiples à 2 points chacune et aucun points partiels. **Vous devez encercler une seule réponse**.
- Les questions 4 et 6 sont à longues réponses, avec chacune 6 points et question 5 vaut 7 points.
- Écrivez vos réponses en bas de chaque question. Vous pouvez utiliser le verso des feuilles si nécessaire.
- Les livres et les notes de cours ne sont pas autorisés.
- les calculatrices scientifiques de base non-graphiques et non-programmables sont autorisées.

Question 1. (2 points) Une brique rectangulaire solide est bornée par les plans $z = 0$, $z = 3$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = 1$ avec une densité de masse donnée par la fonction $f(x, y, z) = 2x + y + z$. Quelle est la masse totale de la brique?

A. 20

B. 21

C. 22

D. 23

E. 24

F. 25

$$M = \int_{z=0}^{3}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1}(2x+y+z)\,dy\,dx\,dz$$

$$= \int_0^3\int_0^2 \left[(2x+z)y + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{1} dx\,dz =$$

$$\int_0^3\int_0^2 \left(2x+z+\frac{1}{2}\right)dx\,dz = \int_0^3 \left[x^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^2 dz$$

$$= \int_0^3 (4+2z+1)\,dz = 5z+z^2\Big|_{z=0}^{3} = 15+9 = 24$$

Question 2. (2 points) On considère la surface paramétrée

$$\vec{r}(p,q) = \sin(q)\,\vec{i} + p\,\vec{j} + \cos(q)\,\vec{k}\ ,\quad 1 \le p \le 3\ ,\quad 0 \le q \le \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est l'aire totale de cette surface paramétrée?

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{3\pi}{2}$

C. π

D. $\frac{5\pi}{3}$

E. $\frac{5\pi}{2}$

F. 2π.

$\vec{r}_p = \vec{j}$, $\vec{r}_q = \cos q\,\vec{i} - \sin q\,\vec{k}$

$$\vec{r}_p \times \vec{r}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos q & 0 & -\sin q \end{vmatrix} = -\sin q\,\vec{i} - \cos q\,\vec{k}$$

$$\|\vec{r}_p \times \vec{r}_q\| = \sin^2 q + \cos^2 q = 1.$$

$$\text{Aire} = \int_1^3\int_0^{\pi/2} \|\vec{r}_p \times \vec{r}_q\|\,dp\,q = \quad \pi$$

[Noter juste la réponse encerclée]

Question 3. (2 points) Trouver la longueur d'arc totale de la courbe paramétrée

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\,\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\,\vec{j} + t\,\vec{k}\,, \quad 1 \le t \le 2.$$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

E. $\sqrt{2}$

F. π

$\vec{r}\,'(t) = t\vec{i} + \sqrt{2}\,t^{1/2}\vec{j} + \vec{k}$

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{t^2+2t+1} = \sqrt{(1+t)^2} = 1+t$

longueur $= \int_1^2 (1+t)\,dt = t + \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 =$

$= 2 + \frac{4}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

[Noter juste la réponse encerclée]

Question 4.a (3 points) Une plaque de dimension 2 est bornée par les courbes $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et $y = x^2 + 1$. Si cette plaque a une densité de masse donnée par $g(x, y) = x^2 + 2y$, calculer sa masse totale.

Masse totale $= \int_0^2 \int_0^{x^2+1} (x^2+2y)\, dy\, dx$

$= \int_0^2 (x^2 y + y^2)\Big|_0^{x^2+1} dx = \int_0^2 \left(x^2(x^2+1) + (x^2+1)^2\right) dx$

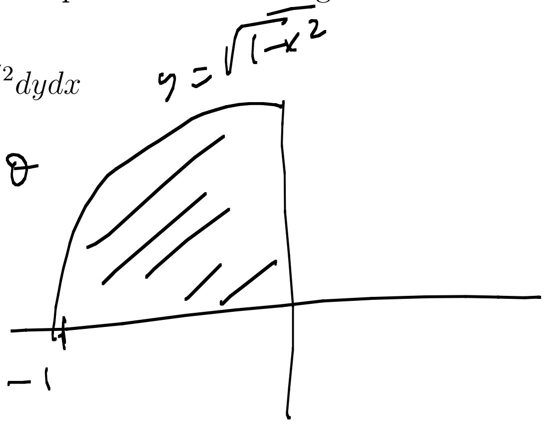
$= \int_0^2 (x^4 + x^2 + x^4 + 2x^2 + 1)\, dx = \int_0^2 (2x^4 + 3x^2 + 1)\, dx$

$= \frac{2}{5}x^5 + x^3 + x\Big|_{x=0}^{2} = \frac{64}{5} + 8 + 2 = \boxed{\frac{114}{5}}$

[1.5 pour l'intégrale, 1.5 pour le calcul]

Question 4.b (3 points) Utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x(x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$



$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$

$0 \le r \le 1, \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

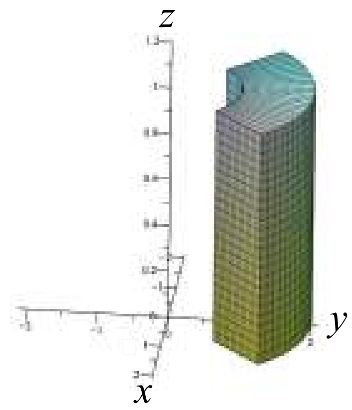
$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x(x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

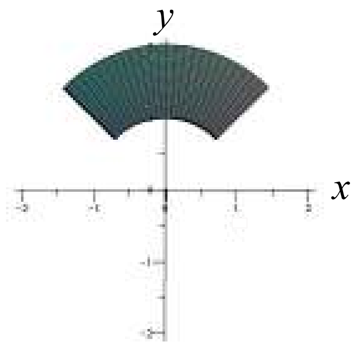
$= \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi} r\cos\theta\, (r^3)\, r\, d\theta\, dr = \int_0^1 r^5\, dr \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta$

$= \frac{r^6}{6}\Big|_0^1 \times \Big[\sin\theta\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \boxed{\frac{-1}{6}}$

[1.5 pour l'intégrale en coord. polaires
1.5 pour le reste du calcul]

Question 5.a (4 points) Le solide ci-dessous (vue de côté et vue d'en haut) est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, le cylindre $x^2 + y^2 = 4$, les plans $z = 0$ et $z = 1$ ainsi que les plans $y = x$ et $y = -x$. Si $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)yz$ est la densité de masse de ce solide, calculer la masse totale en utilisant une intégrale triple en coordonnées cylindriques.





$$\text{Masse totale} = \int_{z=0}^{1} \int_{r=1}^{2} \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} r^2 \cdot r \sin\theta \, z \, r \, d\theta \, dr \, dz$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{1} \times \frac{r^5}{5}\Big|_{r=1}^{2} \Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} = \frac{31}{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{31\sqrt{2}}{10}}$$

2 pour l'intégrale
1 pour le calcul intermédiaire
1 pour la valeur finale

Question 5.b (3 points) Convertir l'intégrale triple suivante en une intégrale triple équivalente en utilisant les coordonnées sphériques, **MAIS IL NE FAUT PAS CALCULER CES INTÉGRALES**

$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dzdxdy$$

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$

$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$

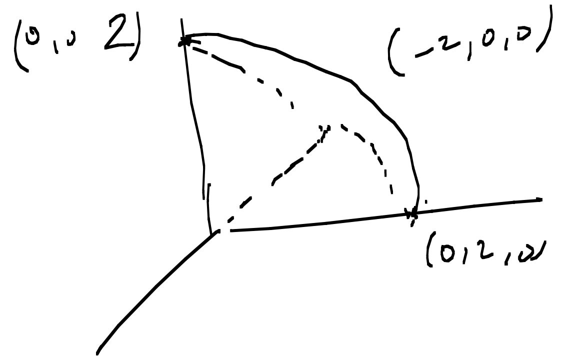
$z = \rho \cos\varphi$

$dzdxdy = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi$

$0 \leq \rho \leq 2$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$



L'intégrale vaut:

$$\int_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho \sin\varphi \sin\theta \cdot \rho^3 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta d\rho$$

$$= \int_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi} \rho^6 \sin^2\varphi \sin\theta \, d\varphi d\theta d\rho$$

[-1 pour chaque intégrale $\int_*^*$ incorrecte,
-1 pour l'intégrand incorrect
-1 pour $dxdydz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\theta d\varphi$ incorrect].

Question 6. (6 points)
On considère le solide à 3 dimensions borné par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$, $y = 1$ et la surface $z = \sqrt{34 - 3x^2 - y^2}$. Si ce solide a une densité de masse donnée par $f(x, y, z) = e^z(2x + y)$, donner une intégrale triple en coordonnées cartésiennes (i.e. x, y, z) qui donne la masse totale de ce solide. **NE PAS EVALUER L'INTEGRALE**

Masse totale =

$$\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{\sqrt{34-3x^2-y^2}} e^z (2x+y)\, dz\, dy\, dx.$$

[−1 pour chaque borne incorrecte
−1 pour l'integrand incorrect
−1 pour l'ordre d'intégration]

Page brouillon