# MAT 2722 A
# CALCUL III
## Examen de Mi-session
**18 novembre 2013**

Professeur: Dr. A. Sebbar

Durée: 80 minutes

Nom:________________________________________

Numéro d'étudiant:____________________________

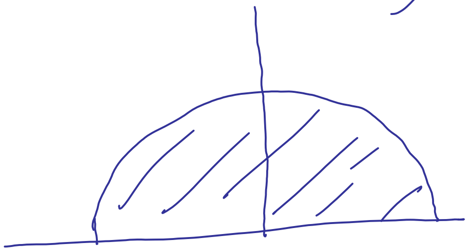
**Instructions:**
- Écrivez votre nom et votre numéro d'étudiant sur cette page.
- Vérifiez que votre copie d'examen contien 6 pages.
- Il y a 5 questions qui valent 4 points chaque pour un total de 20 points.
- Vous devez répondre à toutes les questions.
- Écrivez vos réponses en bas de chaque question. Vous pouvez utiliser le verso des feuilles si nécessaire.
- **Les livres et les notes de cours ne sont pas autorisés.**
- **les calculatrices scientifiques de base non-graphiques et non-programmable sont autorisées.**

**Question 1.** (5 points)

Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Calculez $\displaystyle\int\int_D (x + y)\, dA$.

En coordonnées polaires :

$$D = \{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi \}$$



$$\iint_D (x+y)\, dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2} (r\cos\theta + r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

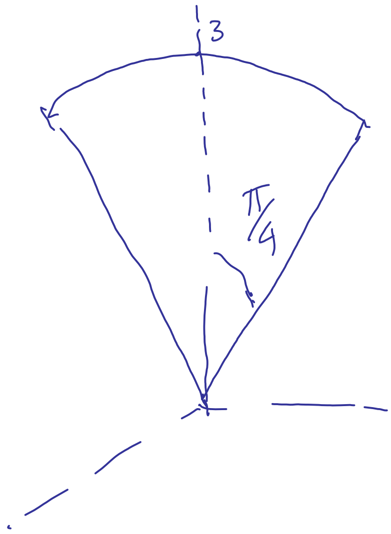
$$= \int_0^{\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^2 (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \left( \sin\theta - \cos\theta \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{16}{13}}$$

**Question 2.** (5 points)
Trouver le volume du solide enfermé par la sphère $x^2+y^2+z^2 = 9$ et le cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.




On utilise les coordonnées sphériques.

Le solide en question est determiné par

$0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

$$\text{Volume} = \iiint_{\text{Solide}} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

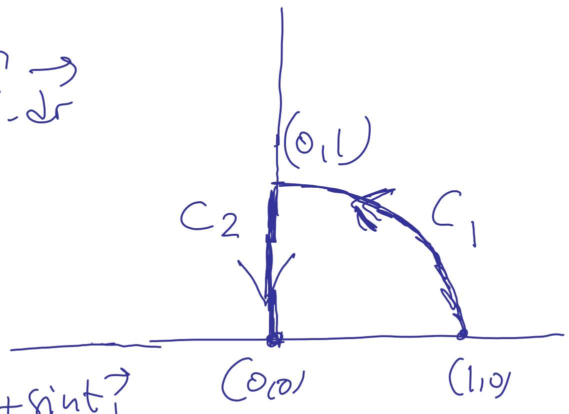
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 9\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4} d\theta = 9\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)d\theta$$

$$= \boxed{9\pi(2-\sqrt{2})}$$

**Question 3.** (5 points)
Calculez l'intégrale curviligne de $\overrightarrow{F}(x, y) = (x-y, x+y)$ le long de la courbe $C$ qui consiste de l'arc du cercle $x^2+y^2$ allant de $(1, 0)$ à $(0, 1)$ orienté positivement et du segment allant de $(0, 1)$ à $(0, 0)$ .

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$




Pour $C_1$ : $\vec{r_1}(t) = \cos t \, \vec{i} + \sin t \, \vec{j}$

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r_1}'(t) = -\sin t \, \vec{i} + \cos t \, \vec{j} = (-\sin t, \cos t)$$

$$\vec{F}(\vec{r_1}(t)) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$$

$$\vec{F}(\vec{r_1}(t)) \cdot \vec{r_1}'(t) = -\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos t \sin t$$

$$= 1$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour $C_2$ : $\vec{r_2}(t) = 0 \, \vec{i} + (1-t) \vec{j}$ , $0 \le t \le 1$

$$\vec{r_2}'(t) = -\vec{j} = (0, -1)$$

$$\vec{F}(\vec{r_2}(t)) = (-1+t, 1-t)$$

$$\vec{F}(\vec{r_2}(t)) \cdot \vec{r_2}'(t) = t-1$$

$$\int_0^1 \vec{F}(\vec{r_2}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt = \int_0^1 (t-1) \, dt = \frac{t^2}{2} - t \Big|_0^1 = \frac{-1}{2}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}}$$

**Question 4.** (5 points)
Lesquels des champs vectoriels suivants sont conservatifs? Pour les champs conservatifs, trouver le potentiel correspondant.

1. $\overrightarrow{F}(x, y) = (y, -x)$.
2. $\overrightarrow{G}(x, y) = (x^2y^2, x^2y)$.
3. $\overrightarrow{H}(x, y) = (ye^x + \sin y, e^x + x\cos y + 2y)$.

1. $Q_x = -1$ , $P_y = 1$ , $P_y \neq Q_x$
$\overrightarrow{F}$ n'est pas conservatif.

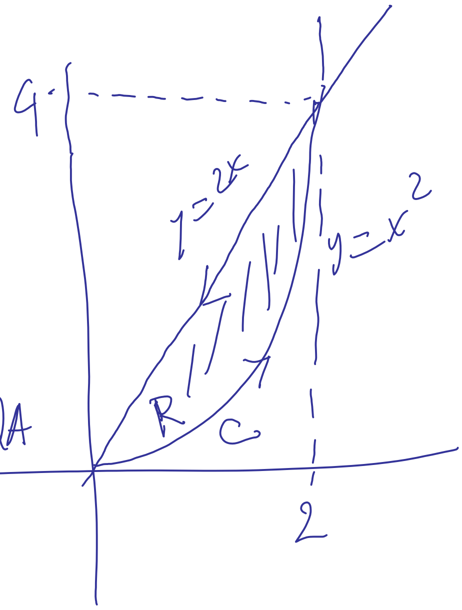
2. $P_y = 2x^2y$, $Q_x = 2xy$ , $P_y \neq Q_x$
$\overrightarrow{G}$ n'est pas conservatif

3. $Q_x = e^x + \cos y$ , $P_y = e^x + \cos y$
$Q_x = P_y$ et $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, donc $\overrightarrow{H}$ est conservatif.
On cherche $f(x,y)$ telle que $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{H}$
On doit avoir: $\begin{cases} f_x = ye^x + \sin y \\ f_y = e^x + x\cos y + 2y \end{cases}$

$f(x,y) = ye^x + x\sin y + g(y)$
$f_y = e^x + x\cos y + g'(y) = e^x + x\cos y + 2y$
$\Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + C$
$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = ye^x + x\sin y + y^2 + C}$ (n'importe quelle valeur de C est acceptée)

**Question 5.** (5 points)
Soit $C$ la frontière, orientée positivement, de la région délimitée par les graphes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$. En utilisant le théorème de Green, calculez l'intégrale curviligne

$$\int_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xydy\,.$$




Théorème de Green:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2; \quad Q(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y - (-2y) = 4y.$$

$$\int_C (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \iint_R 4y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4y\,dy\,dx = \int_0^2 2y^2 \Big|_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 2\left(4x^2 - x^4\right) dx = \left(\frac{8}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \boxed{\frac{128}{15}}$$