

5

1. Pour un système non-homogène de 20 équations à 19 inconnues, répondez aux trois questions suivantes:

- Le système peut-il être incompatible ?
- Le système peut-il avoir une infinité de solutions ?
- Le système peut-il avoir une solution unique ?

- A. Oui, Oui, Non
- B. Non, Non, Oui
- C. Oui, Non, Oui
- D. Non, Oui, Oui
- E. Oui, Oui, Oui
- F. Non, Non, Non

Si $(A|B)$ est la matrice augmentée du syst. et A est la matrice des coef, on

a: $\text{rg}(A|B) \leq 19$ et $\text{rg}(A) \leq 19$.

Si S est compatible, on a: $19 - \text{rg}(A|B) \geq 0$.

Oui.

2. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 13$, calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2a-3g & g & d \\ 2b-3h & h & e \\ 2c-3i & i & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & g & d \\ 2b & h & e \\ 2c & i & f \end{vmatrix}$

$= +2 \begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix} = -26.$

- A. 13
- B. 26
- C. -26
- D. 39
- E. -39
- F. -13

3. Si B est la la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouver la deuxième ligne de B^{-1} :

(A) $[0 \ 1 \ -1]$

B. $[-1 \ 1 \ 0]$

C. $[0 \ -1 \ 1]$

D. $[1 \ -1 \ 0]$

E. $[1 \ 0 \ -1]$

F. Aucune des lignes ci-dessus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4. Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Parmi les ensembles ci-dessous, lequel est une base de $U = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$?

A. $\{v_1\}$

$$U \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim U \leq 3.$$

(B) $\{v_1, v_3\}$

$$v_2 = 2v_1, \Rightarrow \dim$$

C. $\{v_2, v_3, v_4\}$

D. $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

E. $\{v_1, v_3, v_4\}$

F. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 9 \\ 0 & -7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\dim U = 2.$

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$. Trouver tous les couples (a, b) pour lesquelles $A^2 = 0$.

- A. $\pm(1, 1)$
 B. $\pm(2, -2)$
 C. $\pm(2, 2)$
 D. $\pm(3, -3)$
 E. $\pm(3, 3)$
 F. Il n'existe pas de telle couple (a, b) .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -2(a+b) \\ 2(a+b) & b^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Soit $a = \pm 2$ et $b = -a$.

6. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La dimension de $C = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid JA = AJ\}$ est :

- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
 E. 4
 F. 5

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $JA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$

$AJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

Soit $a = d$ et $b = -c$.

$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 lin. indép.

A

7. La matrice $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Parmi les matrices diagonales ci-dessous, laquelle est de la forme $P^{-1}AP$ avec P une matrice inversible?

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ F. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} 8-x & -3 \\ 18 & -7-x \end{pmatrix} = -(8-x)(7+x) + 54.$$

$$= x^2 - x - 56 + 54 = x^2 - x - 2.$$

D'où $\{2, -1\}$ sont les sp de A.

8. Parmi les sous-ensembles ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$?

S

(1) L'ensemble de toutes les matrices 2×2 symétriques ~~2×2~~ (c'est-à-dire les matrices A telles que $A = A^t$).

(2) L'ensemble de toutes les matrices 2×2 antisymétriques ~~2×2~~ (c'est-à-dire les matrices A telles que $A = -A^t$).

(3) L'ensemble de toutes les matrices 2×2 inversibles ~~NON~~. (A inversible $\Rightarrow -A$ inv mais $A + (-A) = 0$ non inversible)

(4) L'ensemble de toutes les matrices 2×2 de trace nulle.

(Rappelons que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors la trace de A est égale à $a + d$).

A. (1) et (2)

B. (1) et (3)

C. (1), (2) et (3)

D. (2), (3) et (4)

E. (3) et (4)

F. (1), (2) et (4)

$$\textcircled{1}. S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} ; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{2}. \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

9. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Rappelons que $\{\sin x, \cos x\}$ est linéairement indépendant et que $\sin(x+b) = \cos b \sin x + \sin b \cos x$, pour tous x et $b \in \mathbb{R}$.

Quelle est la dimension de

$$V = \text{Span}\{\sin x, \cos x, \sin(x+1)\} \text{ et de } W = \text{Span}\{2 \sin x, 3 \cos x\}?$$

- A. $\dim V = 3, \dim W = 3$
- B. $\dim V = 2, \dim W = 3$
- C. $\dim V = 3, \dim W = 2$
- D. $\dim V = 2, \dim W = 2$
- E. $\dim V = 1, \dim W = 3$
- F. $\dim V = 1, \dim W = 2$

Comme $\sin(x+1) = (\cos 1) \sin x + (\sin 1) \cos x$.

$V = \text{Span}\{\sin x, \cos x\}$, et donc $\dim V = 2$

10. Soit A une matrice de format $n \times n$. Parmi les énoncés suivants, lequel N'est PAS équivalent aux autres ?

- A. A est inversible.
- B. $Ax = 0$ a une solution non-triviale $x \in \mathbb{R}^n$.
- C. $Ax = b$ a une unique solution $x \in \mathbb{R}^n$ pour tout $b \in \mathbb{R}^n$.
- D. Le déterminant de A est non nul.
- E. Par l'algorithme de Gauss Jordan, A est équivalente à la matrice identité.
- F. Le rang de A est n .

11.

1) Considérer le système linéaire suivant:

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & & & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & -4 \\ ax & + & by & + & az & = & 0 \end{array}$$

1 pt. si compatible
avec \otimes , et avec
justification.

$\frac{2}{3}$ sans justif.
(au max)

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles le système a

- (i) une unique solution
- (ii) une infinité de solutions
- (iii) aucune solution.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ a & b & a & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & b & 0 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\otimes \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2b & a+4b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ D'au.}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|E) = 3 \quad \underline{\text{ssi}} \quad b \neq 0.$$

$$\text{rg}(A) = 2 \text{ et } \text{rg}(A|E) = 3 \quad \underline{\text{ssi}} \quad b = 0 \text{ et } a \neq 0.$$

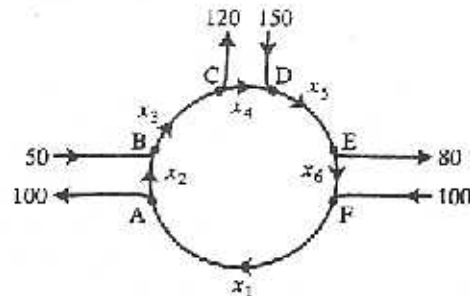
$$\text{rg}(A) = 2 \text{ et } \text{rg}(A|E) = 2 \quad \underline{\text{ssi}} \quad a = b = 0.$$

D) D'au. (i) unique sol. $\underline{\text{ssi}} \quad \text{rg}(A|E) = \text{rg}(A) = 3 = \# \text{ inconnues}$
 $\underline{\text{ssi}} \quad b \neq 0.$

D) (ii) une infinité de sol. $\underline{\text{ssi}} \quad a = b = 0. (\text{rg}(A|E) = \text{rg}(A) = 2).$

D) (iii) aucune sol. $\underline{\text{ssi}} \quad b = 0 \text{ et } a \neq 0. (\text{rg}(A|E) \neq \text{rg}(A)).$

- 2) En Grande-Bretagne, les carrefours sont souvent aménagés en ronds-points, comme dans la figure ci-dessous. On suppose que la circulation s'y effectue dans le sens indiqué.



Déterminer le système d'équations linéaires et les contraintes sur les variables décrivant tous les flots possibles de trafic.

N'oubliez pas de définir vos variables. **NE RÉSOLVÉZ PAS CE SYSTÈME.**

	Entrée		sortie		Sortie
A	x_1	=	$100 + x_2$	$x_1 - x_2 = 100$	$\left(\frac{1}{3}\right)$
B	$x_2 + 50$	=	x_3	$x_2 - x_3 = -50$	$\left(\frac{1}{3}\right)$
C	x_3	=	$120 + x_4$	$x_3 - x_4 = 120$	$\left(\frac{1}{3}\right)$
D	$x_4 + 150$	=	x_5	$x_4 - x_5 = -150$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
E	x_5	=	$80 + x_6$	$x_5 - x_6 = 80$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
F	$100 + x_6$	=	x_1	$x_6 - x_1 = -100$	$\left(\frac{1}{3}\right)$

Contraintes: x_i entières positives ou nuls ($i=1, \dots, 6$)

-

$\left(\frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)$

12. Soit $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$.

(2) avec positif. car il n'est pas.

a) Trouver une base de U et donner la dimension de U .

b) Trouver une base orthogonale de U .

c) Déterminer la meilleure approximation de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par un vecteur de U .

a) 1^{re} méthode: U est un plan de \mathbb{R}^3 , d'où

$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont 2 vect. non col. de U et donc

une base de U (donc $\dim U = 2$).

2^e méthode: $x + 2y + z = 0$ est une équ. lin. homogène,

donc U est l'espace des solutions. D'où

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

↑ ↑
sol. fondamentales

D'où $\dim U = 2$.

(1/2) par 1^{re} méthode.

b). Par Gram-Schmidt, on obtient une base orthogonale

de U en posant $e_1 = u_1$ et $e_2 = u_2 - \frac{u_1 \cdot u_2}{\|u_1\|^2} u_1$, $e_1 \perp e_2$ (1/2) if

D'où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ +4/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ (1/2) f. $e_1, e_2 \in U$

c) La meilleure approx. de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par un vect. de U est

donnée par $\text{proj}_U \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. (1)

$$D'_{\text{au}} \text{proj}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v} = \frac{v \cdot e_1}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{v \cdot e_2}{\|e_2\|^2} e_2$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)$ ni e_1 et $\frac{1}{2}$ ni e_2 .

13. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- ② a) Déterminer le polynôme caractéristique $\det(A - xI_3)$ et en déduire que 1 et 3 sont valeurs propres de A .
- ② b) Calculer l'ensemble E_3 des solutions du système homogène $Ax = 3x$ et déterminer une base de E_3 .
- ① c) Calculer l'ensemble E_1 des solutions du système homogène $Ax = x$ et déterminer une base de E_1 .
- ② d) Si possible, trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale et donner cette matrice diagonale D .

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(A - xI_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x) \left[(2-x)^2 - 1 \right] \\ &= (3-x) \left[x^2 - 4x + 3 \right] = (3-x)(x-1)(x-3) = -(x-3)^2(x-1). \end{aligned}$$

①

D'où 1 et 3 sont vp. de A . ~~①~~

$$\text{b) } E_3 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x+y=0 \right\}$$

①
get to

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}; x, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont 2 vect. propres lin. indép.}$$

①

$$c). E_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

↑
param.

sol. général : $x = t$
 $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. D'où il faut $E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
 $z = 0$ " v_3

v_3 est vp. associée   la val. propre 1.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sont 3 vect. propres lin. indép., d'où il faut une base de \mathbb{R}^3 .

Si $P = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors P est inversible (1)

et $AP = (3v_1 \ 3v_2 \ v_3) = P \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

D'où il faut $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = D$. (1/2)

14. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et considérons l'application $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$S(v) = \overset{u \times v}{v \times u}, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

où "×" dénote le produit vectoriel.

4. a) Montrer que $S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x-z \\ y \end{pmatrix}$

1 b) Trouver la matrice standard de S .

3 c) Trouver une base de $\text{Im}(S)$ et donner une description géométrique complète de $\text{Im}(S)$.

1.5 d) Calculer la dimension du noyau $\text{Ker}(S)$.

a) $S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x-z \\ y \end{pmatrix}; \quad \text{1/2}$

b) Soit A la matrice standard de S . On a.

$$A = \left(S\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Im}(S) = \text{Col}(S) = \text{Spanne} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{spanne} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 Comme $\{a_1, a_2\}$ lin. indép, ils forment une
 base de $\text{Im}(S)$, qui est un plan passant par 0 et
 de vecteur normal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u.$ 1.5

d) On a: $\dim(\text{Ker}(S)) + \dim(\text{Im}(S)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$

D'où $\dim(\text{Ker}(S)) = 3 - 2 = 1$

1/2 comme 2.ép
 1 justif

15. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

a) Parmi les énoncés ci-dessous, indiquer (dans l'espace prévu) lesquels sont vrais ou faux. Si un énoncé est vrai, donnez en la raison; sinon, donnez un exemple numérique illustrant que cet énoncé est faux.

i) Une base d'un espace vectoriel E est un ensemble de générateurs le plus grand possible.

$\{v \in E\}$, l'ens. de tous les vect. de E FAUX. ✓
 est un syst. de gén., mais il n'est pas lin. indép.
 (il contient le vecteur nul !!)

ii) Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$ une application linéaire telle que son noyau $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Si v_1, v_2 et v_3 sont trois vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^4 , alors $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de \mathbb{R}^6 .

VRAI. ✓

On a: $4 = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Im}(T))$

À savoir: Si $a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + a_3 T(v_3) = 0$, alors $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

On a: $a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + a_3 T(v_3) = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) = 0$.

Soit $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \in \text{Ker}(T) = \{0\}$.

Comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. indép., $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de format $(n \times n)$. Si A est diagonalisable, alors elle est inversible.

NON.

La matrice nulle est diagonale,
mais n'est pas inversible.

- iv) Si $v \in \mathbb{R}^n$ est tel que $v \cdot w = 0$ pour tous les vecteurs $w \in \mathbb{R}^n$, alors $v = 0$.

VRAI.

Si $v \cdot w = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$, alors.

$$v \cdot v = \|v\|^2 = 0 \quad . \text{Donc } v = 0.$$

v) Question bonus

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si toutes les valeurs propres de A sont nulles, alors A est la matrice nulle.

FAUX.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle, mais.

$$\det(A - dI_2) = \det \begin{pmatrix} -d & 1 \\ 0 & -d \end{pmatrix} = d^2. \text{ D'où } \text{sp}(A) = \{0\}.$$