Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702C: Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdelkrim El basraoui

Examen Partiel I – V.A

le 1er octobre 2015

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant ______________________

Instructions :

(1) Écrivez votre nom et numéro d'étudiant à la premiére page.
(2) L'examen est d'une durée de 80 minutes.
(3) Cet examen est un examen à livres fermés. Les notes de cours, calculatrices et papier brouillon ne sont permis.
(4) Il y a **5 questions longues**. Le nombre de points pour chaque question est indiqué dans la table à la première page et près du numéro de chaque question.
(5) Vous devez justifier toutes vos réponses.
(6) **Ne pas détacher ce livret**.
(7) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme feuille de brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction si aucune indication n'est faite.
(8) Vous avez une page supplémentaire à la fin pour que vous pouvez utiliser comme brouillon.
(9) Bonne chance !!!

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	Total
Maximum	3	4	2	3	3	15
Note						

1. **(3 points)** Déterminez si l'équation vectorielle suivante est compatible ou incompatible. S'elle est compatible, trouvez sa solution générale.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solution: On réduit la M.A. associée comme suit

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - L_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3} L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

L'équation est compatible avec x_2 et x_4 des variables libres et x_1 et x_3 les variables de base. Le système associé donne la solution suivante $x_1 = 2 - x_4 + 2x_2,\ x_2$ libre, $x_3 = 2x_4 + 1$ et x_4 libre.

2. **(4 points)** Est-ce que le système linéare suivant est compatible ou non? S'il est compatible, trouvez sa solution générale.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 8x_3 & + & 11x_4 & = & 12 \end{array}$$

Solution: On réduit la M.A. associée comme suit

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - 5L_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc ce système est compatible avec $x_1,\ x_3$ sont les variables de base et x_2, x_4 sont libres. La solution générale est donc $x_1 = -2x_2 + x_4 + 4,\ x_2$ libre $x_3 = 1 + 2x_4,\ x_4$ libre.

3. **(2 points)** Trouvez **toutes les valeurs** de h pour lesquelles le système suivant est compatible et admet une solution unique:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ -9x_1 & + & hx_2 & = & 8 \end{array}$$

Solution: On doit trouver la M.E. de la M.A. du système

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ -9 & h & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 9L_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & h+9 & 71 \end{array}\right]$$

Pour une solution unique on ne doit pas avoir de variable libre et donc $h + 9 \neq 0 \iff h \neq -9$.

4. **(3 points)** Soient les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}.$$ Est-ce que le vecteur $\vec{b} = \begin{bmatrix}4\\3\\1\\2\end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{L}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

Si oui, donnez une combinaison en $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ qui donne $\vec{b}$; c'est-à-dire trouvez les poids a_1, a_2, a_3 tels que $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{b}$.

Solution: On réduit la M.A. associée $[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\,|\,\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2\end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - L_1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -2 & -6\end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to (-1)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_3]{L_2 \to L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

La réponse à la première partie de la question est donc **oui** car le système correspondant est compatible. Pour la deuxième partie on trouve la solution du système. De la M.E.R. on peut lire que $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$ et donc on a $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3$.

5. **(3 points)**

(a) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ et soit le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Trouvez la relation entre a, b, c pour que $\vec{u}$ soit une combinaison linéaire des colonnes de A. **Solution:**

Il faut que le système dont la M.A. est $[A|\vec{u}]$ soit compatible. Donc on doit trouver la M.E. associée. On a alors

$$[A|\vec{u}] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & a \\ 0 & 3 & 5 & b \\ 0 & 3 & 5 & 2a+c \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & a \\ 0 & 3 & 5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array}\right].$$

De cette M.E. on peut lire que le système est compatible si et seulement si la dernière colonne n'est pas une colonne pivot et donc on doit avoir $2a - b + c = 0$, qui est la relation à trouver.

(b) Donnez un exemple d'une matrice sous **forme échelonnée** d'un système linéaire avec deux équations et deux variables qui est

(i) compatible avec une solution unique;

Solution: $\left[\begin{array}{cc|c} \square & \star & \star \\ 0 & \square & \star \end{array}\right]$ avec $\square$ désigne une constante non-nulle.

(ii) incompatible.

Solution: $\left[\begin{array}{cc|c} \square & \star & \star \\ 0 & 0 & k \end{array}\right]$ avec $k \neq 0$.

Page supplémentaire (V-A)