VERSION A

aucune virgule après octobre

MAT 2779
Examen Partiel

22 octobre 2012 | **Professeur Gilles Lamothe**
Durée : 80 minutes

 # d'étudiant:________________

Nom : ________________ **Prénom:** ________________

C'est un examen à livre fermé. Une feuille de formules et le tableau pour la loi normale centrée et réduite sont incluses avec l'examen. Seule une calculatrice non-programmable et non-graphique est permise. Notez votre choix de réponse pour chaque question dans le tableau ci-dessous.

Question	Réponse
1	D
2	D
3	D
4	D
5	C
6	C
7	A
8	C
9	B
10	E
11	B
12	E

N.B. : À la fin de l'examen, remettre seulement cette page. Vous pouvez garder le questionnaire.

****

aucun point avant et après les astérisques

1. Le riz IR8 (aussi appelé le riz miraculeux) est un riz génétiquement modifié qui a été introduit en Asie en 1960 et a marqué le début de la Révolution verte. Depuis son invention, plus de 400 variétés de riz amliorées ont été créées par l'Institut international de recherche sur le riz (IIRR). Le nanisme et des rendements élevés sont deux caractéristiques désirables d'un plant de riz. Supposons que les deux traits sont récessifs. Considérez le croisement de deux plantes qui ne donnent pas des rendements élevés, mais sont hétérozygotes pour ce caractère. Supposons que l'une des plantes est un nain, et l'autre est une plante de taille normale qui est hétérozygote pour ce caractère. Quelle est la probabilité qu'une plante de la prochaine génération est une plante naine avec des rendements élevés?

   A) 0 B) 1/2 C) 1/4 D) 1/8 E) 1/16

   Solution: Soit Y l'allèle pour le rendement normal et y pour le rendement élevé. Soit H l'allèle pour la taille normale et h pour le nanisme. La plante naine a le génotype $Yyhh$ et l'autre plante a le génotype $YyHh$. En utilisant un diagramme en arborescence ou carré de Punnett, on observe que les génotypes possibles pour la prochaine génération sont

   $$YYHh, \quad YYhh, \quad YyHh, \quad Yyhh, \quad YyHh, \quad Yyhh, \quad yyHh \quad yyhh$$

   La probabilité qu'une plante de la prochaine génération soit naine avec des grands rendements (c.-à-d. $yyhh$) est $1/8$. La réponse est D.

2. Les entérocoques sont des bactéries qui causent des infections du sang chez les patients hospitalisés. Un antibiotique utilisé pour combattre les entérocoques est la vancomycine. Une étude a révélé qu'au Canada, les bactéries entérocoques sont résistantes à la vancomycine pour 22% de tous les patients hospitalisés qui ont ce genre d'infection. Considérons un échantillon aléatoire de trois patients avec des infections du sang causées par les bactéries entérocoques. Supposons que les trois patients sont traités avec la vancomycine. Quelle est la probabilité que les bactéries entérocoques sont résistantes à la vancomycine pour au moins un des trois patients?

   A) 0,041 B) 0,476 C) 0,062 D) 0,525 E) 0,224

Solution: Soit X le nombre de patients ayant des bactéries entérocoques qui sont résistantes à la vancomycine. X suit une loi binomiale avec $n = 3$ et $p = 0,22$. On veut $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,22)^3 = 0,525$. La réponse est D.

3. Les vaccins sont des moyens efficaces pour aider le corps humain à développer une immunité contre les bactéries ou les virus. Certains vaccins sont produits en utilisant des bactéries ou des virus vivants, qui ont été modifiés de sorte qu'ils ne peuvent pas provoquer la maladie. Soit x le nombre de bactéries (en milliers) trouvés dans un patient trois jours après avoir été inoculé par un vaccin comprenant ces bactéries. Les valeurs observées de x pour $n = 7$ patients sont ci-bas :

$$121; \quad 147; \quad 315; \quad 125; \quad 134; \quad 305; \quad 157.$$

Déterminer la médiane et la distance interquartile de cet échantillon.

A) médiane=125; distance interquartile=158.
B) médiane=125; distance interquartile=101,5.
C) médiane= 186,3; distance interquartile=180.
D) médiane= 147; distance interquartile=180.
E) médiane= 147; distance interquartile=100.

Solution: Voici les valeurs en ordre croissant : 121, 125, 134, 147, 157, 305, 315. Le rang de la médiane est $(n+1)\,50\% = (7+1)(0,5) = 4$. Alors, la médiane est 147. Le rang du premier quartile est $(n+1)\,25\% = (7+1)(0,25) = 2$. Alors, q_1 =125. Le rang du troisième quartile est $(n+1)\,75\% = (7+1)(0,75) = 6$. Alors, $q_3 =$ 305. Alors, la distance interquartile est DIQ $= q_3 - q_1 = 180$.

La réponse est D.

4. La couleur des yeux d'un membre d'un groupe de 1770 hommes allemands est soit bleu ou brun, et la couleur des cheveux est soit blond ou brun. Dans ce groupe, il y a 320 hommes qui ont les cheveux bruns et les yeux bruns, et il y a 250 hommes qui ont les cheveux bruns et les yeux bleus. En outre, 400 ont les cheveux blonds et les yeux bruns. Quelle est la probabilité qu'un membre choisi au hasard de ce groupe a les cheveux blonds et les yeux bleus?

A) 0,5 B) 0,169 C) 0,226 D) 0,452 E) 0,1

Solution: Soit A l'événement qu'un homme choisi au hasard parmi ce groupe a les cheveux bruns, et B l'événement qu'il ait des yeux bruns. Alors, A est l'événement que l'homme ait des cheveux blonds, et B' est l'événement que l'homme ait des yeux bleus. On sait que

$$P(A \cap B) = \frac{320}{1770}, \quad P(A \cap B') = \frac{250}{1770}, \quad P(A' \cap B) = \frac{400}{1770}.$$

Alors,

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) + P(A \cap B') = \frac{970}{1770}.$$

On veut

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{970}{1770} = 0,452.$$

La réponse est D.

5. Les données ci-dessous donne le niveau de cholestérol dans le sang (en grammes par litre) de cinq femmes choisies au hasard :

$$3,0 \quad 1,8 \quad 2,1 \quad 2,7 \quad 1,4$$

Calculer la moyenne de l'échantillon et la variance de l'échantillon.

A) La moyenne est 2,1; la variance est 0,475.
B) La moyenne est 2,1; la variance est 6,475.
C) La moyenne est 2,2; la variance est 0,425.
D) La moyenne est 2,2; la variance est 0,34.
E) La moyenne est 2,0; la variance est 0,275.

Solution: La moyenne de l'échantillon est

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{3,0 + 1,8 + 2,1 + 2,7 + 1,4}{5} = \frac{11}{5} = 2,2.$$

La variance de l'échantillon est

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}^2)}{n-1} = \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}{n-1}.$$

On utilise la deuxième formule. On obtient

$$s^2 = \frac{(3,0^2 + 1,8^2 + 2,1^2 + 2,7^2 + 1,4^2) - (11)^2/5}{4} = 0,425.$$

Notez que la mauvaise réponse $s^2 = 0,34$ est obtenu en divisant par 5 (au lieu de 4). La réponse est C.

6. Il y a eu 15 donneurs ce matin à une clinique de la Société canadienne du sang. Voici la distribution de leur groupe sanguin.

Groupe sanguin	O	A	B	AB
# de donneurs	8	3	3	1

Nous sélectionnons au hasard deux donneurs sans remise parmi ces 15 donneurs. Quelle est la probabilité que nous sélectionnions exactement un donneur du groupe O.

A) 0,2667 B) 0,2489 C) 0,5333 D) 0,4978 E) 0,7156

Solution: Soit O_i que la $i$ème sélection est un donneur du groupe O pour $i = 1, 2$.
On a $P(O_1) = 8/15$. Si O_1 est réalisé, alors il reste 7 du groupe O parmi 14 donneurs pour la $2i$ème sélection. Alors, $P(O_2'|O_1) = 1 - 7/14$. Si O_1' est réalisé, alors il reste 8 du groupe O parmi 14 donneurs pour la 2ième sélection. Alors, $P(O_2|O_1') = 8/14$.
La probabilité qu'on aille sélectionné exactement un donneur du groupe O est

$$\begin{aligned} P[(O_1 \cap O_2') \cup (O_1' \cap O_2)] &= P(O_1 \cap O_2') + P(O_1' \cap O_2) \\ &= P(O_2'|O_1)P(O_1) + P(O_2|O_1')P(O_1') \\ &= (1 - 7/14)(8/15) + (8/14)(1 - 8/15) \\ &= 0,5333 \end{aligned}$$

La réponse est C.

7. Le glaucome est une maladie de l'œil qui se manifeste par une pression intraoculaire élevée. Supposons que pour la population générale, la pression intra-oculaire suit approximativement une loi normale de moyenne 16 mm Hg et d'écart type de 3 mm Hg. Une pression intraoculaire comprise entre 12 mm Hg et 20 mm Hg est considérée normale. Quel proportion de la population générale a une pression intraoculaire normale?

A) $0,8164$ B) $0,0918$ C) $0,9082$ D) $0,1426$ E) $0,2875$

Solution: Soit X la pression intraoculaire d'un individu de cette population. Alors, X suit une loi normale de moyenne $\mu = 16$ et d'écart type $\sigma = 3$.

On veut

$$\begin{aligned}
P(12 \leq X \leq 20) &= P\left(\frac{12-16}{3} \leq \frac{X-16}{3} \leq \frac{20-16}{3}\right) \\
&= P(-1,33 \leq Z \leq 1,33) \\
&= P(Z \leq 1,33) - P(Z < -1,33) \\
&= 0,9082 - 0,0918 = 0,8164.
\end{aligned}$$

La réponse est A.

8. Des études récentes suggèrent qu'il existe un lien entre l'utilisation de rince-bouche contenant de l'alcool (comme Listerine) et le cancer de la bouche. Les données de plusieurs bureaux de dentiste indiquent que 33% des patients atteints du cancer de la bouche ont utilisé Listerine régulièrement pendant plus de 5 ans, alors que parmi les patients qui n'ont pas le cancer de la bouche, 27 % ont utilisé Listerine régulièrement pendant plus de 5 ans. Il est estimé qu'environ 5% de la population générale un cancer de la bouche. Quelle est la probabilité que le patient va développer un cancer de la bouche, étant donné qu'il ou elle a utilisé Listerine régulièrement pendant plus de 5 ans?

   A) 0,05 B) 0,10 C) 0,06 D) 0,01 E) 0,07

   Solution: Soit C l'événement que le patient va développer un cancer de la bouche et L l'événement que le patient a utilisé Listerine régulièrement pendant plus de 5 ans On a $P(C) = 0,05$; $P(L|C) = 0,33$ et $P(L|C') = 0,27$. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(L) &= P(L|C)P(C) + P(L|C')P(C') \\
&= (0,33)(0,05) + (0,27)(0,95) \\
&= 0,0165 + 0,2565 = 0,273.
\end{aligned}$$

   On veut

$$\begin{aligned}
P(C|L) &= \frac{P(C \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L|C)P(C)}{P(L)} \\
&= \frac{(0,33)(0,05)}{0,273} = \frac{0,0165}{0,273} = 0,06.
\end{aligned}$$

   La réponse est C.

9. Un patient souffrant d'hypertension artérielle est dit un hypertendu, et un patient ayant une pression artérielle normale est dit un normotendu. Supposons que 78 % des hypertendus et 21 % des normotendus sont classifiés comme hypertendus par une machine automatisée pour mesurer la tension artérielle. Quelle est la valeur prédictive positive (VPP) et la valeur prédictive négative (VPN) de cette machine, en supposant que 14% de la population adulte soit hypertendue?

A) VPP=0,12, VPN=0,80
B) VPP=0,38, VPN=0,96
C) VPP=0,38, VPN=0,84
D) VPP=0,40, VPN=0,84
E) VPP=0,12, VPN=0,96

Solution: Soit H l'événement que le patient souffre d'hypertension. On a $P(H) = 0,14$. On nous donne la sensibilité $P(T + |H) = 0,78$, et le taux des faux positifs $P(T + |H') = 0,21$. La probabilité le test donne un résultat positif est

$$\begin{aligned} P(T+) &= P(T + |H)P(H) + P(T + |H')P(H') \\ &= (0,78)(0,14) + (0,21)(0,86) = 0,2898. \end{aligned}$$

La valeur prédictive positive est

$$\text{VPP} = P(H|T+) = \frac{P(T + |H)P(H)}{P(T+)} = \frac{(0,78)(0,14)}{0,2898} = 0.377.$$

La valeur prédictive négative est

$$\text{VPN} = P(H'|T-) = \frac{P(T - |H')P(H')}{P(T-)} = \frac{(1 - 0,21)(0,86)}{1 - 0,2898} = 0,957.$$

La réponse est B.

10. Soit X soit la note finale d'un.e étudiant.e choisi.e au hasard qui a pris.e le cours MAT 2779 à l'automne 2013. Supposons que cette note est arrondie à la valeur entière la plus proche (sur une échelle de 0 à 100). Le tableau suivant donne la fonction de répartition F de X :

x	30	40	60	69	74	79	84	89	100
$F(x)$	0	0,067	0,105	0,133	0,246	0,333	0,467	0,8	1

Quelle est la probabilité qu'un.e étudiant.e choisi.e au hasard parmi cette classe ait obtenu.e une note alpha de B ou de B+? (Rappel une note alpha de B correspond à une note finale de 70 à 74 (inclusivement), et une note alpha B+ correspond à une note finale de 75 à 79 (inclusivement)).

A) 0,333 B) 0,133 C) 0,466 D) 0,379 E) 0,2

Solution: La probabilité que l'étudiant.e ait une note entre 70 à 79 (inclusivement), est

$$\begin{aligned} P(70 \leq X \leq 79) &= P(X \leq 79) - P(X \leq 69) = F(79) - F(69) \\ &= 0,333 - 0,133 = 0,2 \end{aligned}$$

La réponse est E.

11. Soit X une variable aléatoire biomiale avec $n = 20$ et $p = 0,3$. Nous voulons faire le calcul avec R. Laquelle des commandes suivantes nous donne la valeur de la probabilité suivante :

$$P(10 \leq X < 13).$$

A) `pbinom(13,20,0.3)-pbinom(10,20,0.3)`
B) `dbinom(10,20,0.3)+dbinom(11,20,0.3)+dbinom(12,20,0.3)`
C) `pbinom(13,20,0.3)-pbinom(9,20,0.3)`
D) `pbinom(10,20,0.3)+pbinom(11,20,0.3)+pbinom(12,20,0.3)`
E) `dbinom(12,20,0.3)-dbinom(9,20,0.3)`

Solution: On veut calculer

$$P(10 \leq X < 13) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12).$$

La réponse A donne $P(X \leq 13) - P(X \leq 10) = P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13)$, ce qui n'est pas ce que nous voulons.
La réponse B donne $P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12)$, ce qui est ce que nous voulons
La réponse C donne $P(X \leq 13) - P(X \leq 9) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13)$, ce qui n'est pas ce que nous voulons
La réponse D donne $P(X \leq 10) + P(X \leq 11) + P(X \leq 13)$, ce qui n'est pas ce que nous voulons
La réponse E donne $P(X = 12) - P(X = 9)$, ce qui n'est pas ce que nous voulons
La réponse est B.

12. La myopie est devenue plus répandue au cours des dernières années, surtout chez les enfants. Bien que la cause de la myopie est inconnue, de nombreux ophtalmologistes pensent que c'est lié à la fatigue des yeux causée par l'utilisation de l'ordinateur couplée avec une prédisposition génétique. Soit X est le nombre de dioptries de myopie d'un enfant de 2 à 16 ans avec la myopie. (Nous enregistrons la valeur avec la forme la plus grave de la myopie entre l'œil gauche et l'œil droit. Par exemple, pour un enfant avec -1,25 à l'œil gauche et -2,50 à l'œil droit, sa valeur de X est -2,5.) En utilisant des données à partir d'un vaste réseau de bureaux d'optométriste spécialisés dans les soins pédiatriques, nous obtenons le tableau de fréquence pour les valeurs de X :

x	inférieure à -6,00	[-6,00; -4,00[	[-4,00; -2,00[	[-2,00; 0,00[
fréquence	3%	7%	36%	54%

Une valeur inférieure à -6,00 est dite une forte myopie. On cueille au hasard un échantillon de 10 enfants atteints de myopie, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux ont une forte myopie?

A) $0,0016$ B) $0,2626$ C) $0,0642$ D) $0,1316$ E) 0,0345

Solution: Soit Y la variable qui donne le nombre d'enfants avec une forte myopie dans l'échantillon slectionn. Y suit une loi binomiale de $n = 10$ épreuves et et la probabilité de succès est $p = 0,03$. La probabilité voulue est:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) \\ &= 1 - (0,97)^{10} - 10(0,03)(0,97)^{9} = 0,0345 \end{aligned}$$

La réponse est E.