Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT1739A – Examen Partiel II – le 9 novembre, 2016

Professeur : Marc-Antoine Leclerc

NOM Solutions

PRÉNOM

NUMÉRO D'ÉTUDIANT

Instructions :

- Vous avez 80 minutes pour compléter cet examen.
- Ceci est un examen à livres fermés et aucunes notes ne sont permises. L'utilisation de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil éléctronique est interdite.
- Lisez chaque question attentivement avant d'y répondre.
- La réponse correcte exige une justification écrite de manière lisible et logique.
- L'utilisation des calculatrices programmables ou graphiques est complètement interdite. Seulement les calculatrices approuvées par la Faculté des sciences (TI-30X, TI-34X, Casio FX260X and Casio FX-300X) sont permises.
- Il y a deux feuilles de brouillon à la fin du questionnaire.
- La valeur totale pour l'examen est 30 points.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- Bonne chance !

1. (8 points) Trouvez la dérivée des fonctions suivantes (Ne pas simplifiez !)

a. $f(x) = \left(\frac{x^3-3x^2+7x-1}{e^x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(\frac{x^3-3x^2+7x-1}{e^x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3-3x^2+7x-1}{e^x}\right)'$$

$$= 3\left(\frac{x^3-3x^2+7x-1}{e^x}\right)^2 \cdot \frac{(x^3-3x^2+7x-1)'e^x-(x^3-3x^2+7x-1)(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= 3\left(\frac{x^3-3x^2+7x-1}{e^x}\right)^2 \cdot \frac{(3x^2-6x+7)e^x-(x^3-3x^2+7x-1)\cdot e^x}{e^{2x}}$$

b. $g(x) = \ln(\sin(2x))$

$$g'(x) = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot (\sin(2x))'$$

$$= \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot (2x)'$$

$$= \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

c. $h(x) = 2x^3 + \cos(e^{x^2})$

$$h'(x) = 6x^2 - \sin(e^{x^2}) \cdot (e^{x^2})'$$

$$= 6x^2 - \sin(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)'$$

$$= 6x^2 - \sin(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

d. $k(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$$k'(x) = (x)' e^{1/x} + x(e^{1/x})'$$

$$= 1 \cdot e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot (1/x)'$$

$$= e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \frac{(1)'x - 1 \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= e^{1/x} + xe^{1/x} \cdot \frac{0-1}{x^2}$$

$$= e^{1/x} + xe^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

2. a. (3 points) Trouvez tous les extremums locaux de la fonction $f(x)$. Puis, utilisez le test de la dérivée seconde pour déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 10$$

$f'(x) = \frac{1}{5}\cdot 5x^4 - \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 = x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - x - 6)$

$= x^2(x-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0 \; , \quad x = 3$ ou $x = -2$

$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x$

$f''(0) = 0$ on ne peut pas conclure à l'aide du test

$f''(3) = 4(3)^3 - 3(3)^2 - 12(3) = 4(27) - 3(9) - 36 = 45 > 0$ minium

$f''(-2) = 4(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) = 4(-8) - 3(4) + 24 = -20 < 0$ maximum

$\Rightarrow$ $(3, f(3))$ est un minimum et $(-2, f(-2))$ est un maximum

b. (2 points) Trouvez le maximum absolu et minimum absolu de la fonction $f(x)$ définie en (a) sur l'intervalle $[-3, 4]$.

$f(-3) = \frac{1}{5}(-3)^5 - \frac{1}{4}(-3)^4 - 2(-3)^3 + 10 = -\frac{243}{5} - \frac{81}{4} + 54 + 10 = -\frac{97}{20} \approx -4.$

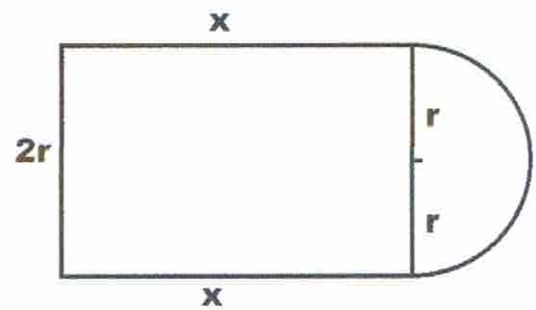
$f(-2) = \frac{1}{5}(-2)^5 - \frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^3 + 10 = \frac{-32}{5} - \frac{16}{4} + 16 + 10 = \frac{78}{5} \approx 15.6$

$f(3) = \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - 2(3)^3 + 10 = \frac{243}{5} - \frac{81}{4} - 54 + 10 \approx -15.65$

$f(4) = \frac{1}{5}(4)^5 - \frac{1}{4}(4)^4 - 2(4)^3 + 10 = \frac{1024}{5} - \frac{256}{4} - 128 + 10 \approx 22.8$

Le maximum absolu est $(4, 22.8)$ et le minimum absolu est $(3, -15.65)$

3. (5 points) Un fermier possède 80 mètres de clôture pour faire un enclos pour ses vaches. L'enclos est divisé en 2 sections par une clôture parallèle à l'un des côtés, comme dans le dessin ci-dessous. Une section est de la forme d'un demi-cerlce et l'autre est de forme rectangulaire. Trouvez les dimensions qui maximise l'aire totale de l'enclos. (Rappel : l'aire d'un cercle est πr^2 et la circonférence d'un cercle est $2\pi r$)



Puisqu'on a 80 mètres de clôture, on a

$$\underbrace{2r + x + x + 2r}_{\text{côtés du rectangle}} + \underbrace{\frac{2\pi r}{2}}_{\text{demi-cercle}} = 80 \Rightarrow 4r + 2x + \pi r = 80$$

$$\Rightarrow 2x = 80 - 4r - \pi r$$

$$\Rightarrow x = \frac{80 - 4r - \pi r}{2}$$

$$= 40 - 2r - \frac{\pi}{2} r$$

$$\text{Aire} = \underbrace{2r \cdot x}_{\text{aire du rectangle}} + \underbrace{\frac{1}{2}\pi r^2}_{\text{aire d'un demi-cercle}} = 2r\left(40 - 2r - \frac{\pi}{2} r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= 80r - 4r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = 80r - 4r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A'(r) = 80 - 8r - \pi r = 0 \Rightarrow 8r + \pi r = 80 \Rightarrow (8+\pi) r = 80$$

$$\Rightarrow r = \frac{80}{8+\pi} \approx 7.18 \text{ m}$$

$$A''(r) = -8 - \pi < 0 \Rightarrow A''(7.18) < 0 \Rightarrow r = 7.18 \text{ est un maximum}$$

$$x = 40 - 2(7.18) - \frac{\pi}{2}(7.18) \approx 14.36 \text{ m}$$

Les dimensions qui maximisent l'aire sont $r = 7.18$ m et $x = 14.36$ m

4. (12 points) Soit $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

On ne peut pas diviser par zéro. Alors, $x+1 \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -1$

Domaine de $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,\infty[$

(b) Trouvez les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec les axes cartésiens (abcisses et ordonné à l'origine).

$f(0) = \frac{0-3(0)}{0+1} = 0 \Rightarrow (0,0)$ ordonné à l'origine

$f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1} = 0 \Rightarrow x^2-3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

$\Rightarrow (0,0)$ et $(3,0)$ sont les abcisses à l'origine

(c) Déterminer les asymptotes verticales et horizontales, s'il y'a lieu.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{(-1)^2-3(-1)}{-1^+ + 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2-3x}{x+1} = \frac{(-1)^2-3(-1)}{-1^- + 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

On a une asymptote verticale en $x = -1$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x}{x+1} \overset{\text{Thm.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x}{x+1} \overset{\text{Thm.}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

On n'a pas d'asymptote horizontale.

(d) Calculer la dérivée première de f et trouver, s'il y'a lieu, les points critiques de f.

$$0 = f'(x) = \frac{(x^2-3x)'(x+1) - (x^2-3x)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-3x-3 - x^2+3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow$ $x=-3$ ou $x=1$ nombres critiques

$\Rightarrow$ $(-3, f(-3)) = (-3,-9)$ et $(1, f(1)) = (1,-1)$ sont les points critiques de f

(e) Calculer la dérivée seconde de f et trouver, s'il y'a lieu, les points critiques de f'.

$$f''(x) = \frac{(x^2+2x-3)'(x+1)^2 - (x^2+2x-3)((x+1)^2)'}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1)^{\cancel{2}\,1} - (x^2+2x-3)(2\cancel{(x+1)}\cdot(1))}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x-3)(2)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{2x}+\cancel{2x}+2-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}+6}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{8}{(x+1)^3} = 0$$

Le numérateur est une constante donc il n'y a pas de points critiques.

(f) Construire le tableau de variation.

x	$-\infty$		-3		-1		1		∞
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
f		↗		↘	‖	↘		↗	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
Concavité de f		$\cap$		$\cap$	‖	$\cup$		$\cup$	

(g) Donnez les intervalles de croissance, de concavitité vers le haut/bas, les extrêmums locaux ainsi que les points d'inflexion, s'il y'a lieu.

Croissant : $]-\infty, -3[\cup]1, \infty[$

Décroissant : $]-3, -1[\cup]-1, 1[$

Concave vers le haut : $]-1, \infty[$

Concave vers le bas : $]-\infty, -1[$

$(-3, f(-3)) = (-3, -9)$ est un maximum local

$(1, f(1)) = (1, -1)$ est un minimum local

Il n'y a pas de points d'inflexion.

(h) Esquissez la fonction f.