Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 1739C – Examen Partiel I – le 28 Septembre 2016

Professeur : Sana Keita

NOM, PRÉNOM : Solutions

NUMÉRO D'ÉTUDIANT : ____________________

Instructions :

- Vous avez 80 minutes pour compléter l'examen.
- C'est un test à livres fermés. Téléphones et tout autre instrument de mise en réserve ou de communication sont interdits.
- Lisez chaque question attentivement avant d'y répondre.
- Les calculatrices programmables ou graphiques ne sont pas permises.
- Il y a trois feuilles de brouillon à la fin du questionnaire.
- La note totale de l'examen est 20 points.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- Bonne chance !

N'inscrivez rien dans ce tableau

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Total
					/20

1. À la suite d'une étude d'une population, un zoologiste prévoit que, dans t années à compter d'aujourd'hui, la population totale d'une espèce, dans une région, sera donnée (en individus) par,

$$Q(t) = \frac{600t + 7000}{5t + 7}.$$

(a) (2 points) Déterminer la **population initiale** et la **population à long terme** de cette espèce.

(i) Population initiale : Initialement $t = 0$, on calcule

$$Q(0) = \frac{600(0) + 7000}{5(0) + 7} = \frac{7000}{7} = 1000 \text{ individus}$$

(ii) Population à long terme : A long terme $t \to \infty$, on calcule

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{600t + 7000}{5t + 7} = \lim_{t \to \infty} \frac{600t}{5t} = 120 \text{ individus}$$

(b) (1 point) Calculer le taux de variation moyen de la population de cette espèce entre la 1^e et la 3^e année.

$$TVM_{[1,3]} = \frac{Q(3) - Q(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{600(3) + 7000}{5(3) + 7} - \frac{600(1) + 7000}{5(1) + 7}}{2}$$

$$= \frac{\frac{8800}{22} - \frac{7600}{12}}{2} = \frac{400 - \frac{1900}{3}}{2} = \frac{3 \times 400 - 1900}{2 \times 3}$$

$$= -\frac{700}{6} \approx -117 \text{ ind./an}$$

2. Calculer les limites suivantes en montrant les étapes de votre calcul. Justifier votre réponse dans le cas où la limite n'existe pas.

(a) (1 point) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{9+x}-3} = \frac{0}{0}$ F. I.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{9+x}+3)}{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{9+x}+3)}{(\sqrt{9+x})^2-(3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{9+x}+3)}{9+x-9} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{9+x}+3)}{x}, \; x \neq 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{9+x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

(b) (2 points) $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4} = \frac{0}{0}$ F. I.

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{x+5})(3+\sqrt{x+5})}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{(3)^2-(\sqrt{x+5})^2}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{9-(x+5)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{-(x-4)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})}, \; x \neq 4$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-1}{3+\sqrt{x+5}} = -\frac{1}{3+\sqrt{9}} = -\frac{1}{6}$$

(c) (1 point) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^8 - 27x + 2}{-x^3 + 7x^2 + 5x + 7} = \frac{\infty}{\infty}$ F. I.

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^8}{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} -5x^{(8-3)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -5x^5 = -5(-\infty) = +\infty$$

(d) (2 points) $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 15x + 56}{|x - 8|} = \frac{0}{0}$ F. I.

$$\lim_{x \to 8^-} \frac{x^2 - 15x + 56}{|x-8|} = \lim_{x \to 8^-} \frac{(x-8)(x-7)}{-(x-8)} \quad , x - 8 \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 8^-} -(x-7) = -(8-7) = -1$$

$$\lim_{x \to 8^+} \frac{x^2 - 15x + 56}{|x-8|} = \lim_{x \to 8^+} \frac{(x-8)(x-7)}{(x-8)} \quad , x - 8 \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 8^+} (x-7) = 8-7 = 1$$

La limite à gauche est différente de la limite à droite

Donc $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 15x + 56}{|x-8|}$ n'existe pas.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$.

(a) (2 points) Utilisez la définition de la dérivée pour trouver la derivée de f.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+1} - \cancel{x^2} \cancel{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}, \quad h \neq 0$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Donc $f'(x) = 2x$

(b) (1 point) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 2$.

Equation de la tangente au point $x = 2$: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$, $f(x) = x^2+1 \Rightarrow f(2) = 5$

D'où $y = 4(x-2) + 5$

$= 4x - 3$

4. Soit la fonction

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x}, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \sqrt{x}+2, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

(a) (2 points) Determiner le domaine de définition de la fonction g.

La fonction g est définie si $x \neq 0$

$D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

(b) (3 points) Trouvez les intervalles sur lesquels la fonction suivante est continue. Justifier votre réponse.

Il est clair que g est continue sur les intervalles

$]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ ~~et~~, $]2, 4[$ et $]4, +\infty[$

Il faut vérifier aux extrêmités 2 et 4 qui appartiennent à D_g.

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x} = \dfrac{4+2}{2} = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2$

Donc g est continue à $x =$

$\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 4$

$\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} g(x)$

Donc g n'est pas continue au point $x = 4$

La fonction est donc continue sur

$]-\infty, 0[\cup]0, 4[\cup]4, +\infty[$

5. Soit la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 55 - t^2, & \text{si } t < 7 \\ 6, & \text{si } t = 7 \\ \dfrac{k^2}{7}t + k, & \text{si } t > 7 \end{cases}$$

(a) (2 points) Déterminer les valeurs de k qui rendent la fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue pour $t < 7$ car c'est un polynôme.
Elle est aussi continue pour $t > 7$ car étant toujours un polynôme
Il reste à vérifier au point $t = 7$

$$\lim_{t \to 7^-} f(t) = \lim_{t \to 7^-} 55 - t^2 = 55 - 49 = 6$$

$$\lim_{t \to 7^+} f(t) = \lim_{t \to 7^+} \frac{k^2}{7}t + k = k^2 + k$$

Donc f est continue au point $t = 7$ si $\lim_{t \to 7^-} f(t) = \lim_{t \to 7^+} f(t) = f(7)$

i.e $6 = k^2 + k \iff k^2 + k - 6 = 0$

On trouve $k = -3$ et $k = 2$

(b) (1 point) Si $k = 3$, la fonction f est-elle dérivable au point $t = 7$? Justifier votre réponse.

Si $k = 3$ alors f n'est pas continue au point 7 et n'est donc pas dérivable au point $t = 7$.

Page de brouillon