

Algèbre linéaire I
MAT 2541
Examen mi-session 2 (Solutions)
Professeur : Paul-Eugène Parent

- ⇒ Cet examen est d'une durée de 80 minutes.
- ⇒ Les notes de cours, livres et références sont interdits.
- ⇒ Aucune calculatrice n'est permise.
- ⇒ Soyez le plus précis possible lors de la rédaction de vos démonstrations.

Question 1 (5 points)

Soit l'application suivante :

$$T : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, 0, b - c).$$

1. Qu'est-ce qu'une application linéaire ?
2. Montrez que T est une application linéaire.
3. Donnez une base du noyau de T .
4. Donnez une base de l'image de T .
5. Vérifiez que la conclusion du Théorème "noyau - image" est bien satisfaite dans cet exemple.

Solutions :

1. Une application linéaire est une fonction $T : V \rightarrow W$ entre deux \mathbb{k} -espaces vectoriels V et W telle que

$$T(v + u) = T(u) + T(v) \quad \text{et} \quad T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

pour tout $v, u \in V$ et $\lambda \in \mathbb{k}$.

2. On montre les deux conditions en même temps. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. On a

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha c + \beta g & \alpha d + \beta h \end{pmatrix}\right), \quad \text{addition dans } \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ &= (\alpha a + \beta e, 0, \alpha b + \beta f - (\alpha c + \beta g)), \quad \text{définition de } T \\ &= \alpha(a, 0, b - c) + \beta(e, 0, f - g), \quad \text{addition dans } \mathbb{R}^3 \\ &= \alpha T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \beta T\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right), \quad \text{définition de } T, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, T est linéaire.

3. On a par définition du noyau

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid T \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (0, 0, 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a, 0, b - c) = (0, 0, 0) \right\}, \quad \text{définition de } T \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = 0 \text{ et } b = c \right\}, \quad \text{définition de l'égalité dans } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Donc un élément du noyau doit satisfaire $a = 0$, $b = c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $\{v_1, v_2\}$ engendre $\ker T$. Si $bv_1 + dv_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $b = d = 0$ par la notion d'égalité dans $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, $\{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendant et donc une base du noyau. On remarque que $\boxed{\dim \ker T = 2}$.

4. D'une part on a $T \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1, 0, 0)$, $T \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (0, 0, 1) = -T \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et $T \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (0, 0, 0)$. Comme toute matrice est combinaison linéaire des matrices canoniques on a que

$$\begin{aligned} \text{Im} T = T(\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists M \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ avec } T(M) = v\} \\ &= \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ engendre $\text{Im} T$. Comme ces deux vecteurs sont deux des trois vecteurs coniques de \mathbb{R}^3 , ils sont linéairement indépendants. On conclut que $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ est une base de $\text{Im} T$. On remarque à nouveau $\boxed{\dim \text{Im} T = 2}$.

5. L'énoncé du théorème "noyau-image" appliqué à ce cas-ci s'écrit

$$\begin{aligned} 4 = \dim \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) &= \dim \ker T + \dim \text{Im} T \\ &= 2 + 2. \end{aligned}$$

Question 2 (5 points)

Considérons les deux espaces vectoriels réels suivants : les matrices carrées d'ordre 2, $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, et les polynômes de degré au plus 2, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (tous deux à coefficients réels). Soit les quatre bases suivantes :

- La base canonique $\beta = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- La base $\eta = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, m\}$ de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, où $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- La base canonique $\alpha = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- La base $\chi = \{1, t, 3t + t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Soit une application linéaire $T : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ et sa matrice associée

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que représente cette matrice ?
2. Calculez $T(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Déterminez les matrices de changement de bases suivantes :

$$[Id_{\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}]_{\eta}^{\beta} \quad \text{et} \quad [Id_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_{\alpha}^{\chi}.$$

4. Calculez $[T]_{\eta}^{\chi}$.

Solutions :

1. Les colonnes de la matrice $[T]_{\beta}^{\alpha}$ représentent les coordonnées dans la base ordonnée α des vecteurs $T(e_{ij})$, où $\beta = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ est la base canonique ordonnée de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
2. On se rappelle que $[T(A)]^{\alpha} = [T]_{\beta}^{\alpha}[A]^{\beta}$. On a donc besoin des coordonnées de A dans la base β . Donc

$$A = 1 \cdot e_{11} + 2 \cdot e_{12} + 3 \cdot e_{21} + 4 \cdot e_{22},$$

c'est-à-dire, $[A]^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} [T(A)]^{\alpha} &= [T]_{\beta}^{\alpha}[A]^{\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

d'où $T(A) = 3 \cdot 1 + 7 \cdot t = 7t + 3$ car $\alpha = \{1, t, t^2\}$.

3. Il s'agit de trouver les coordonnées des vecteurs de la base η (respectivement α) dans la base β (respectivement χ).

(a) Dans le premier cas le seul vecteur qui nécessite un calcul est m . Donc $m = 1 \cdot e_{21} +$

$$1 \cdot e_{22} \text{ d'où } [m]^\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et donc}$$

$$[Id_{\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}]_\eta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Dans le deuxième cas, le seul vecteur qui nécessite un calcul est t^2 . Donc $t^2 =$

$$-3 \cdot t + 1 \cdot (3t + t^2) \text{ d'où } [t^2]^\chi = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et donc}$$

$$[Id_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_\alpha^\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On utilise le résultat vu en classe, c'est-à-dire, $[T]_\eta^\chi = [Id_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}]_\alpha^\chi \cdot [T]_\beta^\alpha \cdot [Id_{\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}]_\eta^\beta$, d'où

$$\begin{aligned} [T]_\eta^\chi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Question 3 (5 points)

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre \mathbb{k} -espaces vectoriels finiment engendrés.

1. Quelle est la nature des vecteurs de l'espace vectoriel $(V)^\vee$?
2. Comment la transposée T^\vee de T est-elle définie ?
3. Si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $T(x, y, z) = (x, z)$ et $f \in (\mathbb{R}^2)^\vee$ est tel que $f(x, y) = x - y$ alors calculez $T^\vee(f)(1, 2, 3)$.

Solutions :

1. Ce sont des transformations linéaires du type $T : V \rightarrow \mathbb{k}$.

2. Comme nous avons vu en classe, la transposée nous est donnée par

$$\begin{aligned} T^\vee : W^\vee &\longrightarrow V^\vee \\ g &\mapsto g \circ T. \end{aligned}$$

3. On a donc $T^\vee(f) = f \circ T$. Par conséquent, $T^\vee(f)(1, 2, 3) = f(T(1, 2, 3)) = f(1, 3) = 1 - 3 = -2$.

Question 4 (5 points)

Soit $\beta : V \times W \rightarrow \mathbb{k}$ une application où V et W sont des \mathbb{k} -espaces vectoriels finiment engendrés.

1. Que veut-on dire lorsqu'on affirme que β est une forme bilinéaire ?
2. Soit $\{(1, 1), (1, -1)\}$ une base ordonnée de \mathbb{R}^2 . En tant qu'élément de $(\mathbb{R}^2)^\vee$ montrez que

$$(1, -1)^*(x, y) = \frac{x - y}{2},$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Considérons le produit scalaire classique $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$ définie sur \mathbb{R}^2 . On a montré en classe que le produit scalaire était bien une forme bilinéaire non-dégénérée et que celui-ci induisait un isomorphisme donné par la formule

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^\vee \\ (c, d) &\mapsto \langle \cdot, (c, d) \rangle. \end{aligned}$$

Trouvez l'unique vecteur $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Omega(c, d) = (1, -1)^*$ (de la sous-question (4.2)).

Solutions :

1. C'est une application qui est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire,
 - (a) $\beta(ax + by, z) = a\beta(x, z) + b\beta(y, z)$ pour tout $x, y \in V$, $z \in W$ et $a, b \in \mathbb{k}$; et
 - (b) $\beta(x, ay + bz) = a\beta(x, y) + b\beta(x, z)$ pour tout $x \in V$, $y, z \in W$ et $a, b \in \mathbb{k}$.
2. On se rappelle que $(1, -1)^*$ est une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ayant la propriété que $(1, -1)^*(1, 1) = 0$ et $(1, -1)^*(1, -1) = 1$. En général on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que

$$\begin{aligned} (x, y) &= x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) \\ &= x \cdot \frac{(1, 1) + (1, -1)}{2} + y \cdot \frac{(1, 1) - (1, -1)}{2}. \end{aligned}$$

D'où, par la linéarité de $(1, -1)^*$,

$$\begin{aligned} (1, -1)^*(x, y) &= \frac{x}{2} \cdot (1, -1)^*[(1, 1) + (1, -1)] + \frac{y}{2} \cdot (1, -1)^*[(1, 1) - (1, -1)] \\ &= \frac{x}{2}(0 + 1) + \frac{y}{2}(0 - 1) \\ &= \frac{x - y}{2}. \end{aligned}$$

3. On remarque que $\Omega(c, d) \in (\mathbb{R}^2)^\vee$, c'est-à-dire, c'est une transformation linéaire $\Omega(c, d) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Deuxièmement on note que $(1, -1)^*$ est de la même nature. Donc si on désire l'égalité entre ces deux objets on doit demander que

$$\Omega(c, d)(x, y) = (1, -1)^*(x, y), \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

c'est-à-dire,

$$\langle (x, y), (c, d) \rangle = \Omega(c, d)(x, y) = (1, -1)^*(x, y) \underbrace{=}_{(4.2)} \frac{x - y}{2}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par inspection si on pose $(c, d) = \frac{1}{2}(1, -1)$ alors par définition du produit scalaire on a

$$\langle (x, y), \frac{1}{2}(1, -1) \rangle = \frac{x - y}{2}, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce choix de vecteur (c, d) fonctionne donc. De plus, comme Ω est un isomorphisme, et donc injectif, ce choix est l'unique possible. On conclut

$$\Omega\left(\frac{1}{2}(1, -1)\right) = (1, -1)^*.$$