Algèbre linéaire I
MAT 2541
Examen mi-session (solutions)

Professeur : Paul-Eugène Parent

Question 1 (**5 points**)

1. Qu'est-ce qu'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel ?

   Solution : Un $\mathbb{k}$-espace vectoriel est un ensemble V munit de deux opérations : l'addition $+ : V \times V \to V$ et la multiplication par un scalaire $\cdot : \mathbb{k} \times V \to V$, où $\mathbb{k}$ est un corps, satisfaisant aux axiomes suivants :

   (a) l'associativité de l'addition : $u + (v + w) = (u + v) + w$ pour tout $u, v, w \in V$.

   (b) la commutativité de l'addition : $u + v = v + u$ pour tout $u, v \in V$.

   (c) l'élément neutre : il existe un élément $0 \in V$ tel que $u + 0 = u$ pour tout $u \in V$.

   (d) l'élément inverse : pour tout $u \in V$ il existe $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0$.

   (e) l'associativité de la multiplication : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $v \in V$, on a $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.

   (f) la distributivité (1) : $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$ pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$ et $u, v \in V$.

   (g) la distributivité (2) : $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ et $v \in V$.

   (h) l'action du neutre multiplicatif : $1 \cdot v = v$ pour tout $v \in V$.

2. Démontrez à partir des axiomes définissants un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V l'énoncé suivant : si $v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{k}$ alors

$$\alpha v = v \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha = 1 \text{ ou } v = 0.$$

   Solution : On rappel la propriété des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de simplification à droite ou à gauche, c'est-à-dire, si $u_1, u_2, v \in V$ et $u_1 + v = u_2 + v$ alors $u_1 = u_2$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + 0 \quad \text{par le (c)} \\ &= u_1 + (v + (-v)) \quad \text{par le (d)} \\ &= (u_1 + v) + (-v) \quad \text{par le (a)} \\ &= (u_2 + v) + (-v) \quad \text{par hypothèse} \\ &= u_2 + (v + (-v)) \quad \text{par le (a)} \\ &= u_2 + 0 \quad \text{par le (d)} \\ u_1 &= u_2 \quad \text{par le (c).} \end{aligned}$$

   Il en va de même à gauche. Si $\alpha = 1$ alors $1 \cdot v = v$ par le (h). Si $v = 0$ alors

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 + 0 &= \alpha \cdot 0 \quad \text{par le (c)} \\ &= \alpha \cdot (0 + 0) \quad \text{par le (c)} \end{aligned}$$

$$\alpha \cdot 0 + 0 \;=\; \alpha \cdot 0 \,+\, \alpha \cdot 0 \quad \text{par le (f).}$$

On conclue par la simplification à gauche que $\underbrace{\alpha \cdot 0 = 0}_{(*)}$.

Pour la réciproque nous avons besoins de trois résultats :

(i) l'unicité de l'inverse : en effet si $w \in V$ est un autre inverse pour un élément $v \in V$ alors

$$\begin{aligned} w &= w + 0 \quad \text{par le (c)} \\ &= w + (v + (-v)) \quad \text{par le (d)} \\ &= (w + v) + (-v) \quad \text{par le (a)} \\ &= 0 + (-v) \quad \text{par le (b) et le (d)} \\ w &= -v \quad \text{par le (b) et le (c).} \end{aligned}$$

(ii) Pour tout $v \in V$, $0 \cdot v = 0$: en effet

$$\begin{aligned} 0 \cdot v + 0 &= 0 \cdot v \quad \text{par le (c)} \\ &= (0 + 0) \cdot v \quad \text{par l'élément neutre } 0 \in \mathbb{k} \\ 0 \cdot v + 0 &= 0 \cdot v \,+\, 0 \cdot v \quad \text{par le (g).} \end{aligned}$$

On conclue à l'aide de la simplification à gauche.

(iii) Pour tout $v \in V$, $-1 \cdot v = -v$: en effet

$$\begin{aligned} v \,+\, -1 \cdot v &= 1 \cdot v \,+\, -1 \cdot v \quad \text{par le (h)} \\ &= (1 + (-1)) \cdot v \quad \text{par le (g)} \\ &= 0 \cdot v \quad \text{par l'inverse additif dans } \mathbb{k} \\ &= 0 \quad \text{par le (ii).} \end{aligned}$$

On conclue à l'aide du (i).

On démontre enfin la réciproque. Si $\alpha = 1$ alors $1 \cdot v = v$ pour tout $v \in V$ par le (h) et est donc compatible avec l'hypothèse $\alpha \cdot v = v$. Si $\alpha \neq 1$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= v \,+\, (-v) \quad \text{par le (d)} \\ &= \alpha \cdot v \,+\, (-v) \quad \text{par hypothèse} \\ &= \alpha \cdot v \,+\, -1 \cdot v \quad \text{par le (iii)} \\ &= (\alpha \,+\, -1) \cdot v \quad \text{par le (g).} \end{aligned}$$

Comme les inverses additifs dans $\mathbb{k}$ sont uniques et $\alpha \neq 1$ on doit avoir $\alpha \,+\, -1 \neq 0$, c'est-à-dire est inversible par rapport à la multiplication dans $\mathbb{k}$. On a donc finalement

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v \quad \text{par le (h)} \\ &= [(\alpha \,+\, -1)^{-1}(\alpha \,+\, -1)]v \quad \text{par l'inverse multiplicatif dans } \mathbb{k} \\ &= (\alpha \,+\, -1)^{-1}[(\alpha \,+\, -1) \cdot v] \quad \text{par le (e)} \\ &= (\alpha \,+\, -1)^{-1} \cdot 0 \quad \text{par le dernier résultat} \\ v &= 0 \quad \text{par le (*).} \end{aligned}$$

Question 2 (**5 points**)
Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions.

1. Définissez : une fonction *injective*.

   Solution : Une fonction $f : X \to Y$ est injective si lorsque $x_1, x_2 \in X$ et $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

2. Montrez que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

   Solution : Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective et que $f(x_1), f(x_2) \in Y$, on doit avoir $f(x_1) = f(x_2)$. Finalement comme f est injective et que $x_1, x_2 \in X$, on doit avoir $x_1 = x_2$, c'est-à-dire, $g \circ f$ est injective.

3. Si $g \circ f$ est injective alors que peut-on affirmer dans un premier temps à propos de f et dans un second temps à propos de g (démontrez ou donnez un contre-exemple) ?

   Solution : Dans un premier temps si $x_1, x_2 \in X$ et que $f(x_1) = f(x_2)$ alors $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Mais comme $g \circ f$ est injective, on doit avoir que $x_1 = x_2$. On conclue que f est injective. Dans un second temps on ne peut rien affirmer à propos de g. En effet, soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2$ et $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ l'inclusion, c'est-à-dire, $f(x) = x$. Alors $g \circ f$ est injective mais g ne l'est pas.

Question 3 (**5 points**)
Soit le sous-ensemble des polynômes de degré au plus trois à coefficients réels ($\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$) suivant

$$U = \left\{ ax^3 - 2bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Définissez : la notion d'ensemble *linéairement indépendant*.

   Solution : On dit qu'un sous-ensemble fini $\{v_1, ..., v_n\}$ d'un $\Bbbk$-espace vectoriel V est linéairement indépendant lorsque l'implication suivante est vrai :

   $$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

   où $a_i \in \Bbbk$. En général, on dit qu'un sous-ensemble S de V est linéairement indépendant si tous les sous-ensembles finis de S sont linéairement indépendants.

2. Montrez que U est un sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   Solution : On remarque que tous les éléments de U s'écrivent

   $$ax^3 - 2bx + c \;=\; a \cdot x^3 + (-2b) \cdot x + c \cdot 1,$$

   c'est-à-dire, $U \subset < x^3, x, 1 >$. En utilisant la remarque dans le sense inverse, c'est-à-dire,

   $$\alpha x^3 + \beta x + \gamma = \alpha x^3 - 2(\frac{-\beta}{2})x + \gamma,$$

   on a $U = < x^3, x, 1 >$. Comme nous avons vu en classe, le sous-ensemble de droite est un sous-espace. On conclut que U est un sous-espace.

3. Trouvez une base de U et calculez $\dim_{\mathbb{R}} U$.

   Solution : Par le (2), $\{x^3, x, 1\}$ est un ensemble générateur de U. De plus, on a vu au DGD qu'il est linéairement indépendant. En effet, si

   $$ax^3 + bx + c = 0$$

   alors par la notion d'égalité dans $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ on obtient $a = b = c = 0$, ce qui démontre bien que l'ensemble est linéairement indépendant. On conclue que c'est une base et donc $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$, le nombre d'éléments de la base.

4. Complétez la base que vous avez obtenue pour U en une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   Solution : On a vu au DGD que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) =< x^3, x^2, x, 1 >$ et que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$ ce qui implique $\{x^3, x^2, x, 1\}$ est une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. De plus c'est bien une extension de la base de U.

Question 4 (5 points)
Soit $T : V \to W$ une application linéaire entre deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels V et W.

1. Qu'est-ce que le noyau de T, c'est-à-dire, $\ker T$?

   Solution : Le noyau de T est le sous-ensemble de V

   $$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}.$$

2. Soit $w \in W$ et supposons qu'il existe un $v_o \in V$ tel que $T(v_o) = w$. Montrez que $T(v) = w$ si et seulement si $v = v_o + u$, où $u \in \ker T$.

   Solution : Si $T(v) = w$ alors $T(v) = T(v_o)$. Par linéarité, $T(v - v_o) = 0$, c'est-à-dire, $v - v_o \in \ker T$. En d'autres mots, il existe $u \in \ker T$ tel que $u = v - v_o$, c'est-à-dire, $v = v_o + u$ pour un certain $u \in \ker T$. Réciproquement, si $v = v_o + u$ où $u \in \ker T$ alors on a

   $$\begin{aligned} T(v) &= T(v_o + u) \\ &= T(v_o) + T(u) \quad \text{par la linéarité de } T \\ T(v) &= w + 0 = w \quad \text{car } u \in \ker T, \end{aligned}$$

   d'où $T(v) = w$.